



**Tiago Ferreira Santos   Sistema de Fundos de Pensões em Portugal.**



## **Tiago Ferreira Santos    Sistema de Fundos de Pensões em Portugal.**

Relatório de Estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Economia, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Joaquim Carlos Costa Pinho, Professor Auxiliar do Departamento de Economia, Gestão e Engenharia Industrial da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho à minha família.

## **o júri**

presidente

Prof. Doutor Joaquim da Costa Leite  
professor associado com agregação da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Egas Manuel da Silva Salgueiro  
professor auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Joaquim Carlos da Costa Pinho  
professor auxiliar da Universidade de Aveiro

## **agradecimentos**

Quero agradecer à minha família pelo especial apoio que me ofereceu ao longo deste longo caminho.

## **palavras-chave**

Fundos e planos de pensões, Segurança Social, métodos actuariais, contribuições.

## **resumo**

Os Governos manifestam um crescente interesse pelos regimes privados de reforma, mais do que pelos regimes públicos, como meio de assegurar rendimentos aos pensionistas. As pensões de reforma representam, actualmente, a parte mais pesada das despesas sociais nos orçamentos públicos e prevê-se que essa parte da despesa pública venha a aumentar nos próximos anos. O facto de os regimes atingirem a maturidade, independentemente de outros factores, provoca um agravamento das despesas e o envelhecimento das populações contribui para ampliar esses efeitos. Por outro lado, os períodos decorrentes de desemprego elevado e de fraco crescimento limitam as actuais capacidades orçamentais dos governos.

O tema a reforma da segurança social é, nos dias de hoje, um dos mais debatidos a nível mundial. De facto, as alterações significativas que se registam a nível da organização social e do trabalho e no padrão de crescimento económico, conjugadas com um processo de envelhecimento demográfico, vieram alterar a estabilidade orçamental da generalidade dos modelos de financiamento dos sistemas de segurança social. Os Governos começam, por isso, a encarar as pensões do sector privado como um meio de assegurar rendimentos aos reformados nos próximos anos, sem terem que aumentar os impostos e como uma forma de atenuar as pressões que, a curto prazo, incidem sobre os orçamentos públicos. No entanto, falta, muitas vezes, uma visão global do conjunto dos papeis desempenhados pelos regimes privados de pensões, da forma como esses papeis são cumpridos, dos conflitos que podem surgir entre objectivos públicos e privados, das potencialidades das pensões privadas, bem como dos respectivos custos.

Infelizmente, as sugestões de reforma que temos conhecimento enfermam, muitas vezes, de pelo menos dois problemas: não se têm mostrado esclarecedoras, nem apresentam propostas de reforma que permitam alcançar uma trajectória para o equilíbrio. A defesa da imitação de modelos utilizados noutros países esquece as diferenças culturais e organizacionais entre esses países e Portugal e, como tal, pode opor-se à “filosofia” que é a base do sistema português, caindo assim em ruptura socioeconómica.

**keywords**

Pension funds, pension plans, social security, actuarial method, contributions.

**abstract**

Governments expressed a growing interest in private pension schemes, rather than through public pension schemes as a means of ensuring income to pensioners. Pensions at present represent the heaviest part of social spending in public budgets and it is expected that part of public expenditure will increase in coming years. The fact that the systems reach maturity, regardless of other factors and causes extra costs and aging population contribute to increase these effects. Moreover, the periods due to high unemployment and weak growth limit the current fiscal capacity of governments.

The theme of the social security reform is today one of the most debated worldwide. In fact, the significant changes that are taking place at the level of social organization and labor and the pattern of economic growth, combined with an aging demographic, has changed the fiscal stability of most models of financing social security systems. Governments are therefore beginning to face the private sector pension as a means of securing income for pensioners in the coming years, without having to raise taxes and as a means of alleviating the pressures in the short term, focus on budgets public. However, lack, often, an overview of all the roles played by private pensions, the way these roles are fulfilled, the conflicts that can arise between public and private objectives, the potential of private pensions, as well as costs.

Unfortunately, the suggestions for reform that we know suffer, often at least two problems: where not enlightening, nor present reform proposals to achieve a path towards equilibrium. The defense of the imitation of models used in other countries forget the cultural and organizational differences between these countries and Portugal and, as such, may oppose the philosophy that underlies the Portuguese system, thus falling into social economic disruption.

## INDICE

INTRODUÇÃO .....	3
Objectivo .....	5
Metodologia geral do trabalho .....	5
1. Sistema de Segurança Social em Portugal .....	6
1.1. Factos e problemas da Segurança Social em Portugal.....	6
1.2. Desemprego .....	12
2. Fundos e planos de pensões .....	17
2.1. Fundos e planos de pensões em Portugal.....	20
2.3. Sistema dos 3 Pilares.....	29
3. Planos de pensões de contribuição definida .....	31
3.2. Entregas anuais de termos variáveis.....	37
3.3. Entregas fraccionadas de termos constantes .....	43
3.4. Entregas fraccionadas de termos variáveis.....	47
4. Planos de pensões de benefício definido.....	55
4.1. Base técnica.....	56
5.2. Estabelecimento de hipótese.....	57
5.2.1. Condicionantes demográficas .....	57
5.2.2. Condicionantes económicas.....	63
4.2.3. Condicionantes financeiras .....	68
4.3. Prestações previstas.....	69
4.4.2 Custo suplementar .....	74
4.4.3 Custo anual.....	75
4.5 Provisões matemáticas .....	75
4.6. Ganho actuarial .....	77
5.1.2. Método de crédito unitário projectado .....	86



5.2. Métodos actuarias de prestações projectadas .....	88
5.2.2. Método da idade normal alcançada .....	104
5.2.3. Método do prémio constante individual .....	106
6. Conclusão .....	113
7. Bibliografia .....	114

## INTRODUÇÃO

O financiamento dos regimes públicos de reforma tem sido objecto de inúmeros debates no decurso dos últimos anos. Os motivos de tal preocupação, são bem conhecidos: a evolução demográfica tem afectado negativamente a estrutura dos encargos dos regimes legais; a chegada dos regimes à maturação tem levado a um aumento das despesas; os períodos recorrentes de desemprego elevado e de estagnação económica têm limitado a capacidade orçamental do governo. O Governo tem tentado aplicar medidas de forma a conter ou reduzir o aumento das despesas dos regimes públicos de pensões e a consequente carga que fazem incidir sobre os contribuintes, no entanto, é extremamente difícil atingir níveis de crescimento verificados no passado, que só assim, permitiriam manter os actuais níveis das prestações atribuídas aos idosos (cujo número é crescente). Ou ao invés, iremos assistir ao necessário aumento das contribuições ou dos impostos, a suportar fundamentalmente pelos trabalhadores activos (em número cada vez menor).

O Governo pelos motivos acima enunciados, tem encarado o sector privado como um meio possível para assegurar rendimentos aos reformados sem aumentar os impostos nos próximos anos e, além disso, como uma forma de reduzir as pressões que, a curto prazo, incidem sobre os orçamentos públicos.

“O problema na Segurança Social é o de conciliar as medidas de curto prazo com as necessidades e as capacidades de longo prazo. É o que eu chamo combater a miopia estrutural. Por isso, é que eu digo que, nessas (Segurança Social e Saúde), se deve governar para gerações e não se deve governar para eleições.” (Felix, 1995)

Pretendo com este estudo analisar a evolução do sistema dos Fundos de Pensões em Portugal tendo como variável a sustentabilidade financeira dos sistemas públicos de pensões.

O objectivo fundamental que se pretende alcançar com o desenvolvimento dos Fundos de Pensões<sup>1</sup> é o de garantir um rendimento digno na reforma a todos os cidadãos, contribuindo assim para evitar a crise social e económica decorrente do envelhecimento das populações.

Por outro lado, os Fundos de Pensões apresentam-se como uma mais-valia de extrema importância para qualquer economia, uma vez que, graças à utilização dos seus activos

---

<sup>1</sup> Fundo de Pensões é um património autónomo, composto por vários activos financeiros e afecto à realização de um ou mais planos de pensões, sendo essa composição, por norma, legalmente regulamentada.

permitem contribuir para o crescimento económico, a criação de emprego e o aumento da competitividade<sup>2</sup>. Estes apresentam já uma experiência de muitas décadas, surgindo nos Estados Unidos da América no ano de 1875 o primeiro fundo de pensões privado, criado pela American Express Company. (Pensões, 2009)

Apresentando-se entre as entidades mais importantes a operar no mercado financeiro, ao longo de gerações podemos verificar analisando a teoria do ciclo de vida, que os agentes económicos poupam para manterem estável o nível de consumo ao longo da sua vida. Para o conseguirem, aforram parte do seu rendimento nos anos de vida activa, para o despendem quando se reformarem.

---

<sup>2</sup> Banco Mundial, "Averting the Old Age Crisis: Policies To Protect The Old And Promote Growth", 1994.

## **OBJECTIVO**

Este trabalho tem por objectivo, estudar e aprofundar a realidade dos fundos de pensões em Portugal, tendo como variável principal a sustentabilidade financeira dos sistemas públicos de pensões.

Irei fazer uma abordagem técnica-actuarial de todas as formas de planos de pensões, e de seguida exemplificar cada uma delas, com casos práticos.

## **METODOLOGIA GERAL DO TRABALHO**

Com os objectivos acima indicados, o trabalho apresentar-se-á dividido em duas partes incidindo a primeira sobre a temática dos fundos de pensões no contexto do sistema de previdência português e a segunda na demonstração técnica-actuarial dos planos de pensões, sendo uma parte experimental e elucidativa do cálculo destes mesmos.

## 1. SISTEMA DE SEGURANÇA SOCIAL EM PORTUGAL

O sistema de Segurança social em Portugal é financiado por repartição de rendimentos do trabalho. Significa que, através de um contrato implícito entre gerações, são as contribuições calculadas a partir dos rendimentos do trabalho da população activa a financiar as despesas em prestações sociais da população inactiva.

### 1.1. FACTOS E PROBLEMAS DA SEGURANÇA SOCIAL EM PORTUGAL<sup>3</sup>

“Num sistema de repartição, um regime está em equilíbrio quando pensões = contribuições. Será excedentário caso *pensões < contribuições* e deficitário em caso contrário.

A massa gasta em pensões num determinado período, por exemplo, num mês, corresponde a  $PM \times NR$  em que  $PM$  é a pensão média e  $NR$  o número de reformados<sup>4</sup>.

As contribuições dos activos correspondem a  $SM \times NA \times t$  em que  $SM$  é o salário médio e  $NA$  o número de activos (excluindo desde já os desempregados).  $t$  é a taxa de contribuição média em relação ao salário.

Em equilíbrio,

$$PM \times NR = SM \times NA \times t$$

Um sistema de repartição depende da estabilidade desta relação<sup>5</sup>. A tendência de evolução de cada uma destas variáveis, que será analisada em pormenor a seguir, evidencia o desequilíbrio crescente da relação<sup>6</sup>.

---

<sup>3</sup> Darei relevo apenas ao problema da sustentabilidade financeira e aos factos com ela relacionados. Num estudo centrado no Sistema de Segurança Social não deveriam ser descurados problemas como o da qualidade da protecção da segurança social, a equidade, a eficiência do sistema, etc..

<sup>4</sup> O desenvolvimento da equação deverá ser mais completo em modelos que pretendem quantificar os défices e excedentes futuros da Segurança Social (prevendo, por exemplo, a diferenciação entre sexos de algumas variáveis ou o impacto da emigração e imigração). Neste estudo pretende-se unicamente avaliar a tendência futura das variáveis e o seu impacto na sustentabilidade financeira da Segurança Social.

<sup>5</sup> Numa análise ainda mais precisa da realidade portuguesa deveria acrescentar como receita, a componente do IVA que compensou uma redução na Taxa Social Única. Esta omissão em nada afecta, contudo, as conclusões.

$$PM \times NR = SM \times NA \times t$$

Até ao momento, e ao contrário de outras variáveis, PM, mesmo considerando apenas o regime geral, não teve um crescimento muito significativo<sup>7</sup>. O cálculo de PM resulta da multiplicação de um factor de acumulação pelo salário-base presumível e que o factor de acumulação é de 2% por ano de contribuição com um mínimo de 30% e um máximo de 80%. Mantendo-se os actuais benefícios, o que se constata é que nas pensões de velhice, com um peso bastante mais significativo que as de invalidez, a tendência é para um claro aumento da pensão média. Em 1992, os pensionistas de velhice do regime geral tinham uma carreira contributiva média de 13,8 anos enquanto em 1995 essa média subia para 15,1 anos. No ano de 1996 apenas 14% dos pensionistas tinham uma carreira contributiva de mais de 30 anos. A carreira média dos beneficiários que se reformaram em 1990 era de 19,25 anos e em 1996 era de 21,87 anos, de acordo com Santos e tal. (1998).

$$PM \times NR = SM \times NA \times t$$

A variável NR está em constante crescimento como resultado de um efeito combinado dos seguintes factores:

- Extensão dos esquemas de reforma depois de 1974, aceitação inicial de prazos de garantia baixos e diminuição temporária da idade de reforma para as mulheres;
- Reformas antecipadas e pré-reformas;
- Aumento da esperança média de vida.

Os dois primeiros factores contribuíram para a entrada no sistema de novos contribuintes que se tornaram pensionistas antes do que seria desejável para o equilíbrio do sistema. Tratou-se afinal de conceder “facilidades”, sem conceder contrapartidas para o regime. E, se nessa altura em que foram concedidas, o regime geral era excedentário, a médio e longo prazo a capitalização do excedente poderia ser bastante útil para a garantia do sistema. Observando a

---

<sup>6</sup> A análise que se segue diz respeito ao regime geral. Este é o regime mais relevante uma vez que se a Lei de Bases da Segurança Social for cumprida os restantes regimes não serão financiados pelas contribuições dos activos. São regimes de solidariedade com receitas quase nulas.

<sup>7</sup> Em 1996, “cerca de 88% das pensões de velhice e 86% das de invalidez não ultrapassam a pensão mínima” revela Santos e tal. (1998).

Tabela, ficam patentes os extraordinários aumentos do número de pensionistas a cada cinco anos com especial ênfase, claramente, para os anos após 1974.

**Tabela 1 - Taxas de crescimento do número de pensionistas de velhice do regime geral e da globalidade dos regimes**

Período	Regime Geral			Todos os Regimes		
	Homens	Mulheres	Total	Homens	Mulheres	Total
1970/75	166,70%	243,80%	189,50%	533,60%	1741,20%	891,70%
1975/80	110,70%	249%	159,40%	90,50%	121,20%	107,40%
1980/85	36%	54,70%	44,80%	7,60%	13,30%	11%
1985/90	29,60%	35,60%	32,60%	13,30%	12,70%	12,90%
1990/95	26%	25,70%	25,80%	12,90%	7,20%	9,50%

Fonte: Santos et. Al (1998)

O terceiro factor (e o mais mediático), faz aumentar, indirectamente, o número de pensionistas em cada momento, ao prolongar a duração da sua situação de beneficiário. Em 1960, a esperança de vida era de 61,2 anos para os homens e 66,8 anos para as mulheres. Em 1995, era de 71,6 anos para os homens e 78,6 para as mulheres. Na década de 90, segundo Silva (1998), o aumento da esperança de vida na idade da reforma terá sido de 1 ano para os homens e dois para as mulheres esperando-se que até 2020 volte a aumentar em igual magnitude. A longevidade, produto do desenvolvimento económico-social, agrava o estado de um regime em frágil equilíbrio.

$$PM \times NR = SM \times NA \times t$$

O salário médio sobre o qual incidem as contribuições tem aumentado alguns pontos percentuais em termos reais nos últimos anos graças à incorporação dos ganhos de produtividade nos salários. A tendência de longo prazo è, apesar de tudo, desfavorável. Os salários reais do conjunto actual dos países da União Europeia cresceram sempre acima de 4% entre 1961 e 1973. Nas últimas duas décadas nunca cresceram acima de 2,3%. Além disso, a situação de alguns grupos e trabalhadores tem configurado situações de provável sub-declaração de rendimentos<sup>8</sup>. A uma era de empregos, isto é, de trabalho relativamente permanente com condições contratuais relativamente estáveis, sucede-se uma era em que a

<sup>8</sup> Contrariamente, eram detectados casos de sobre declaração nos últimos anos de contribuições para melhorar o resultado da fórmula de cálculo das pensões.

oferta de trabalho mantém-se mas sem estabilidade a nível contratual, proliferando formas de trabalho temporário, a tempo parcial, trabalho independente, subcontratação generalizada, alternância de períodos de desemprego com a formação e o emprego. etc.<sup>9</sup>.

$$PM \times NR = SM \times NA \times t$$

A evolução global do valor de NA resulta do efeito conjugado de:

- Integração de novos grupos de beneficiários/contribuintes nos regimes da Segurança Social;
- Diminuição da natalidade<sup>10</sup>;
- Aumento do tempo de escolaridade e demora no início do 1º emprego;
- Aumento do desemprego estrutural<sup>11</sup>.

Enquanto o primeiro factor, que afecta positivamente as contas da Segurança Social, resulta da extensão da cobertura do sistema (e tem a sua evidente contrapartida, a prazo, no número de pensionistas), os restantes resultam de efeitos duráveis que, ou fazem simplesmente diminuir o contingente de população jovem, ou fazem retardar o início da situação de contribuintes do regime geral ou ainda colocam um grupo de trabalhadores sistematicamente numa situação de impossibilidade de contribuição (e, simultaneamente, de beneficiários do subsídio de desemprego). Quanto à natalidade, refira-se que a camada mais jovem da população representava em 1960 29,2% da população total e apenas 14,4% em 1995. Deste conjunto de efeitos tem resultado uma diminuição ligeira do número de activos (de 4.254.699 em 1980 para 4.021.200 em 1995).

$$PM \times NR = SM \times NA \times t$$

A variável t poderia ser, por simplificação, a Taxa Social Única (TSU). Desde de 1 de Janeiro de 1995 tem o valor de 34,75% repartida pelo trabalhador (11%) e empregador (23,75%)<sup>12</sup>.

---

<sup>9</sup> Modalidades de trabalho a que alguns chamarão precárias e outros chamarão flexíveis.

<sup>10</sup> O que adicionado ao aumento da esperança média de vida (e do número de idosos) se poderá chamar de duplo envelhecimento.

<sup>11</sup> Ou taxa natural de desemprego.

<sup>12</sup> Anteriormente a componente do empregador era de 24,5%. Esta diminuição foi compensada com a já referida introdução do IVA social.



Existem, contudo taxas especiais, normalmente inferiores à TSU, com o objectivo de tratar situações que, pela sua natureza, também serão especiais<sup>13</sup>. Porém, como o produto da Taxa Social Única se destina à cobertura de diversas eventualidades devemos-nos restringir em qualquer análise à taxa que se destina a cobrir as despesas com pensões (excluindo, por isso, as eventualidades de doença, encargos familiares, desemprego, etc., também não contempladas no lado esquerdo da equação). A penúltima desagregação da TSU atribuía (num total de 35,5%) 13,9% para a cobertura das eventualidades de velhice, 6,9% para a invalidez e 4,1% para a morte. Em 199, o Decreto-Lei n.º 200/99 de 8 de Junho actualizou os valores do regime geral dos trabalhadores por conta de outrem fixando os seguintes<sup>14</sup>:

**Tabela 2 - Desagregação da taxa social única por eventualidades**

Eventualidades	Taxa Desagregada
Velhice	16,01%
Invalidez	3,42%
Morte	3,67%
Encargos familiares	2,15%
Doença	3,05%
Doença profissional	0,50%
Maternidade	0,73%
Desemprego	5,22%

Fonte: Decreto-Lei n.º 200/99

Nesta análise a variável  $t$  poderá manter um valor constante forçando o aparecimento de défices ou excedentes ou, numa projecção de cenários, poderá ser considerada uma variável de ajustamento de receitas e despesas.

Resumindo as tendências relativas a cada uma destas variáveis:

**PM** (aumento) × **NR** (aumento elevado) = **SM** (aumento ligeiro) × **NA** (diminuição ligeira) × **t** (constante)

É esta a situação (crescimento elevado das despesas e lento das receitas) que torna insustentável, no médio e longo prazo, o actual sistema de segurança social. Obviamente,

<sup>13</sup> No âmbito do regime geral, as situações com tratamento mais favorável encontram-se previstas no Decreto-Lei n.º 199/99 de 8 de Junho.

<sup>14</sup> Os principais subjacentes à fixação das taxas contributivas do regime geral foram fixados pelo Decreto-Lei n.º 199/99 de 8 de Junho de 1999.

colocando de parte considerações de justiça social, é economicamente um erro penalizar o factor trabalho com uma TSU elevadíssima de forma a equilibrar a equação.

Podemos ver a mesma situação colocando em evidência  $t$ ,

$$t = (PM/SM) \times (NR/NA)$$

em que  $PM/SM$  é a taxa de substituição do salário e  $NR/NA$  é o rácio de dependência (incorporando  $NA$ , recorde-se, o efeito da taxa de desemprego e sabendo que  $NR$  não inclui os idosos activos que fazem parte de  $NA$ ).

**Tabela 3 - Evolução dos rácios  $PM/SM$  e  $NR/NA$**

	1980	1985	1990	1995
$PM/SM$	27,40%	27,70%	28,60%	34,10%
$NR/NA$	23,47%	23,10%	29,56%	36,24%

Fonte: Silva (1998)

Como fica patente a partir da Tabela<sup>15</sup>, cada um dos rácios aumentou significativamente nos últimos anos fazendo com que a taxa de contribuição de equilíbrio seja cada vez mais alta. Em 1980, a taxa de equilíbrio era de apenas 6,4% e em 1995 já era mais do dobro atingindo 13,4%, de acordo com Silva (1998). Se o financiamento da Segurança Social, tal como o dispõe a Lei de Bases, tivesse sido respeitado e os regimes não contributivos tivessem sido financiados com recurso a transferências do Orçamento de Estado, os excedentes do regime geral poderiam estar a ser capitalizados há muitos anos amortecendo o efeito de alguns anos deficitários ou financiando a transição para um novo sistema.

O problema fundamental na Segurança Social é o de conciliar as medidas de curto prazo com as necessidades e as capacidades de longo prazo.

---

<sup>15</sup> É frequente encontrar análises que incidem sobre o inverso do rácio  $NR/NA$  mostrando, por isso, o número de activos por número de pensionistas. Para o regime geral, os valores são os seguintes:

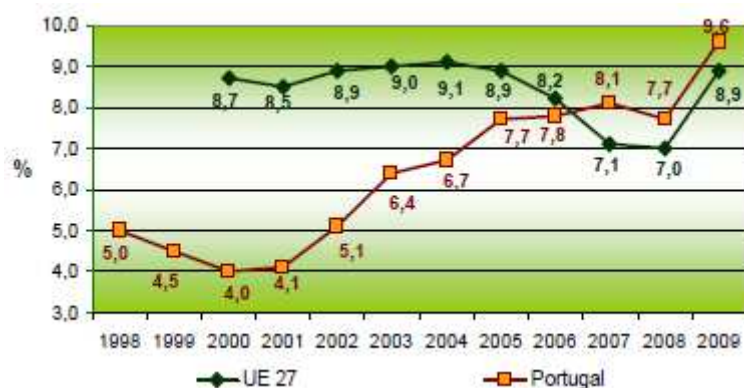
1992	2,65
1993	2,48
1994	2,55
1995	2,45

O sistema das pensões é um sistema com um aliciante terrível, quase um paradoxo: é um sistema em que se distribui num ano o que se recebe nesse ano; num ano melhor – como, por exemplo, o ano 1990 e o ano 1989 em que houve aumento do emprego, os salários reais cresceram, a economia cresceu mais – a Segurança Social conseguiu amealhar mais cinquenta ou sessenta milhões de contos e então avançou-se com 14º mês de pensões. Foi uma medida que socialmente ninguém contestou, pelo contrário. E no ano seguinte, quem é que financia a decisão tomada? O “buraco” da Segurança Social, que todos ouvem falar, resulta dessa medida: o 14º mês; um mês de pensões custava nessa época cerca de setenta milhões contos. Isto é, com uma medida destas sem qualquer reforma estrutural do sistema a Segurança Social aumentou os seus encargos anuais, para o futuro, sempre em setenta milhões de contos. No primeiro ano houve esse dinheiro. Depois, surgiu o desemprego, os salários reais não estavam a crescer (Setenta milhões de contos, em 91 e 92, já não houve). O Estado teve que “suportar”, por outras palavras, teve que financiar o diferencial provocado pela queda da economia.

Mais recentemente, foram sendo introduzidas mudanças significativas ao nível da sistema de Segurança Social, susceptíveis de reduzir o nível de pensões a atribuir pelo sistema público. Entre essas alterações, sublinhamos as que decorrem do Decreto-Lei n.º 35/2002, de 19 de Fevereiro, onde se definiu um novo método de cálculo para o valor das pensões, tomando toda a carreira contributiva do indivíduo, ao invés dos melhores dez dos últimos quinze anos, anteriormente em vigor.” (Silva, 1995)

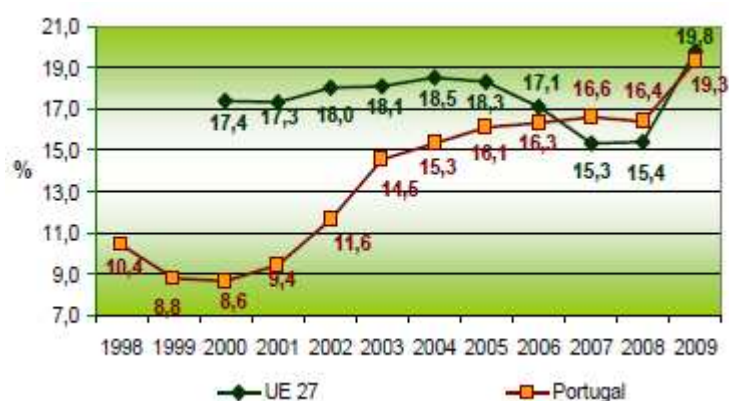
## **1.2. DESEMPREGO**

Nos últimos três anos, a taxa de desemprego portuguesa tem-se situado acima da taxa média europeia, tendo ambas sofrido um acréscimo de 1,9 p.p. entre 2008 e 2009. Assim, em 2009, 9,6% da população activa portuguesa encontrava-se numa situação de desemprego, quase o dobro do valor observado em 1998, enquanto para a média da EU 27 essa percentagem era de 8,9%. Relativamente à taxa de desemprego dos jovens, não obstante registar um comportamento semelhante à taxa de desemprego, o aumento mais acentuado da taxa média europeia, entre 2008 e 2009, levou a uma inversão de posições, ficando a taxa de desemprego dos jovens portugueses abaixo da taxa média europeia, tal como se verificava até 2006. Desta forma, 19,3% dos jovens activos portugueses estavam desempregados em 2009, menos 0,5 p.p. face à média da EU 27. (Almeida, Nunes, & Amaro), 2010)



**Ilustração 1- Taxa de desemprego**

Fonte: Eurostat, Base de dados Labour Force Survey



**Ilustração 2 – Taxa de desemprego dos jovens**

Fonte: Eurostat, Base de dados Labour Force Survey

A taxa de desemprego de longa duração para Portugal continuou na tendência de decréscimo iniciada em 2007, situando-se nos 3,7% em 2008, acima da média europeia que se fixou em 2,6%, no mesmo período. Em virtude da descida mais acentuada da taxa média de desemprego de longa duração da EU 27, o diferencial entre as duas taxas tem vindo a aumentar, passando de 0,2 p.p. em 2006 para 1,1 p.p em 2008.

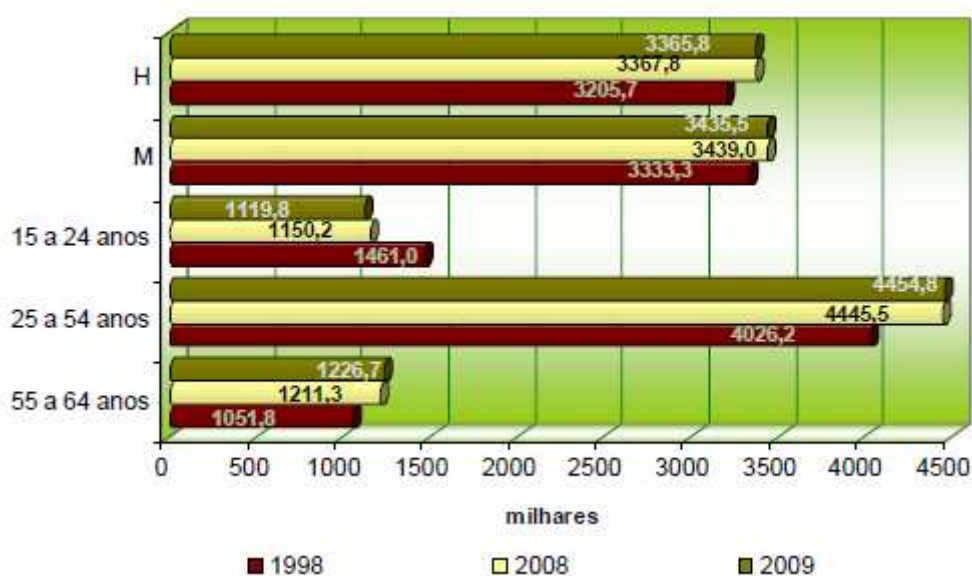


**Ilustração 3 – Taxa de desemprego de longa duração (%população activa)**

### 1.3. POPULAÇÃO E POPULAÇÃO ACTIVA

Em 2009 a população total no continente era de 10 145,5 milhares de indivíduos, mais 13,1 mil pessoas face ao valor médio de 2008 e 496,8 mil relativamente a 1998. As taxas médias anuais de crescimento da população têm vindo a abrandar desde 2004, situando-se actualmente pouco mais acima de 0,1%.

Analisando a evolução da população de 15 a 64 anos por escalão etário, denota-se claramente a tendência de envelhecimento da população. Assim constata-se que foi o grupo etário dos 25 a 54 anos o que mais contribuiu para o aumento observado entre 1998 e 2009, com mais 428,6 mil indivíduos, seguindo-se o escalão dos 55 a 64 anos com uma subida de 174,9 mil pessoas. Pelo contrário, os jovens de 15 a 24 anos registaram uma redução significativa de 341,2 mil indivíduos, menos 23,4% face a 1998.

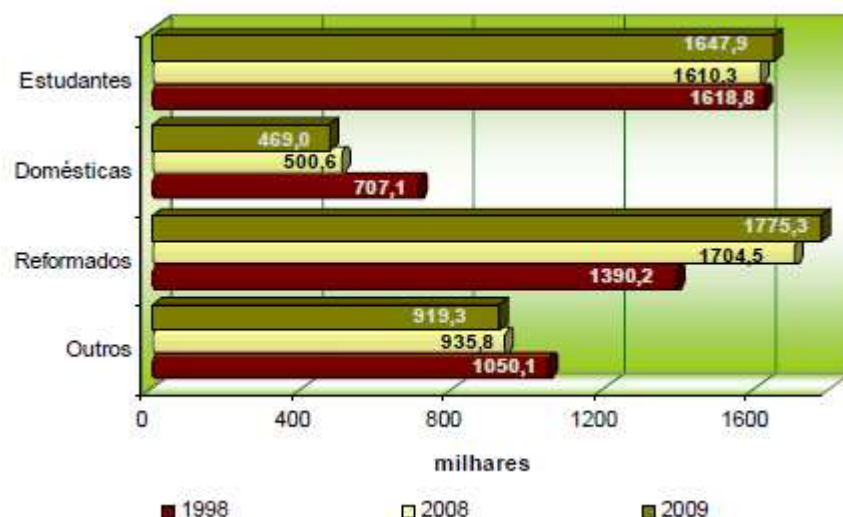


**Ilustração 4 - População 15 a 64 anos por sexo e grupo etário**

Fonte: INE, Inquérito ao emprego

Observou-se pela primeira vez desde o início desta série, a população de 15 a 64 anos sofreu uma ligeira diminuição em 2009 face a 2008 (5,6 mil indivíduos, correspondentes a 0,1%), em virtude de o aumento registado no escalão dos 25 a 64 anos não ter compensado a redução observada nos jovens de 15 a 24 anos.

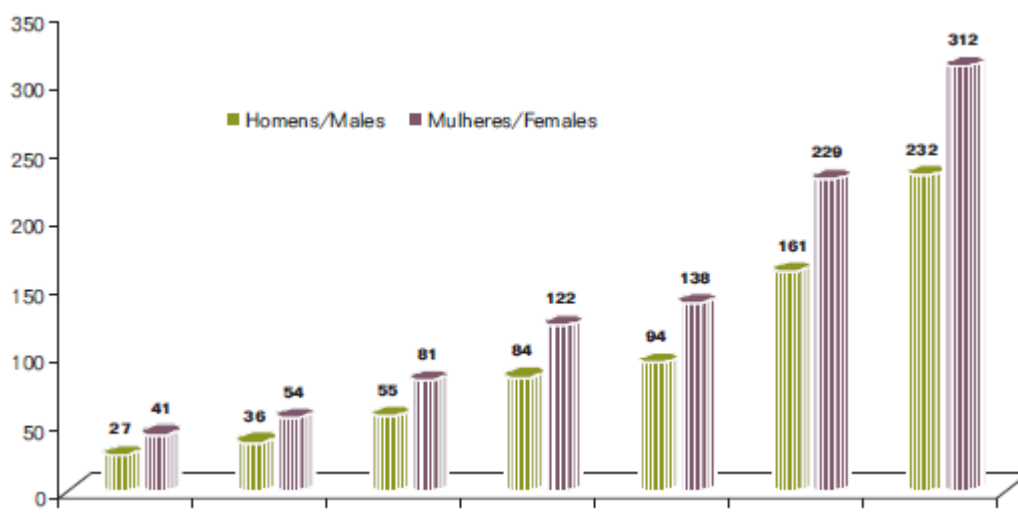
Após anos sucessivos de crescimento, embora a ritmos decrescentes, a população activa, que em 2009 abrangia 5 344 indivíduos, diminuiu em cerca de 47,2 mil indivíduos nesse ano relativamente a 2008 (-0,9%).



**Ilustração 5 - População inactiva**

Fonte: INE, Inquérito emprego

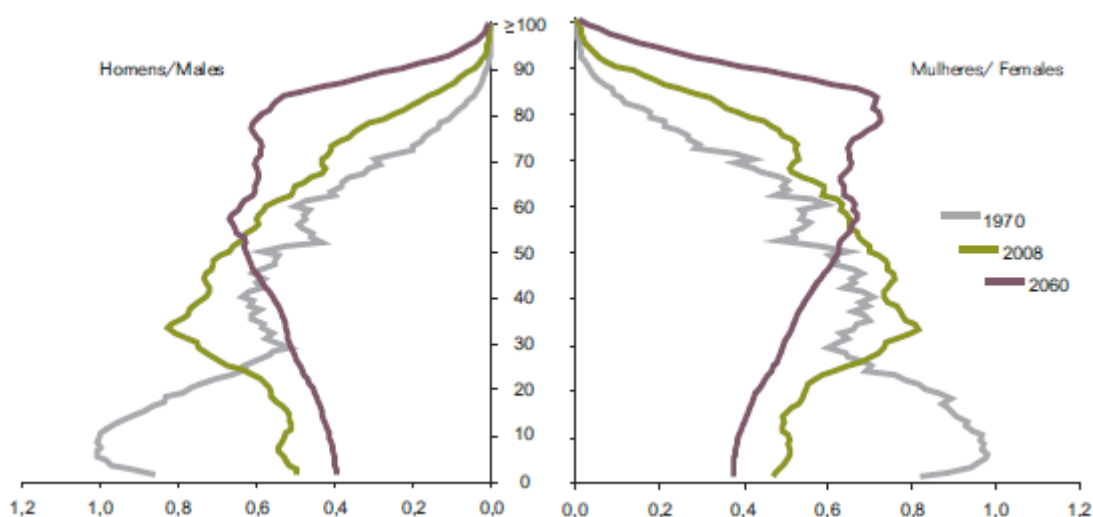
A população inactiva, cuja evolução ao longo de 1998 a 2009 tem sido oscilante, apresentou pelo segundo ano consecutivo uma evolução de sinal positivo (mais 60,4 mil indivíduos face a 2008). O balanço face a 1998 evidencia resultados, ou seja, um aumento da população inactiva (mais 45,3 mil pessoas). Analisando o comportamento das diversas componentes da população inactiva, entre 1998 e 2009, constata-se que, à excepção de 2003, o número de reformados apresentou aumentos sucessivos ao longo deste período. (Almeida, Nunes, & Amaro), 2010)



**Ilustração 6 - Índice de envelhecimento (N.º) por sexo, Portugal, 1970-2060**

Fonte: INE, Estimativa da população residente

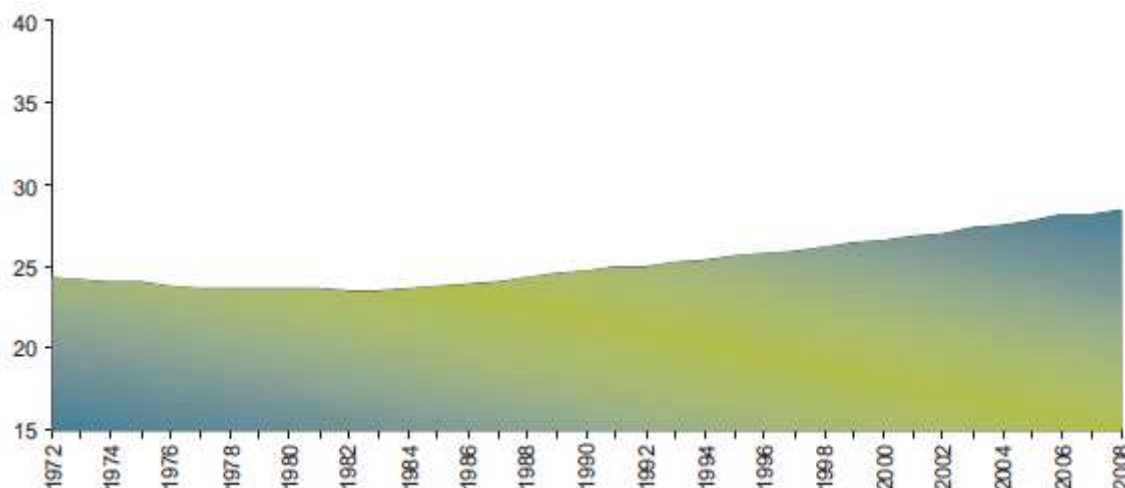
A proporção de pessoas idosas (65 ou mais anos) na população total aumentou representando, em 2008, 15,2% e 19,9% de homens e mulheres, respectivamente. Prevê-se que atinja 29,5% nos homens e 35% nas mulheres, em 2060. Paralelamente, a população jovem, com menos de quinze anos, evidencia uma tendência em baixa e é inferior à idosa. Entre 1970 e 2008 o índice de envelhecimento passa de 27 idosos por cada 100 jovens, para 94, no caso dos homens e 41 para 138 no caso das mulheres. Espera-se que o indicador seja superior a 2 idosos por cada 1 homem jovem e ultrapasse as 3 idosas por cada uma mulher jovem em 2060, no cenário central. (Men and Women in Portugal, 2010)



**Ilustração 7 - Pirâmide etária da população residente em Portugal, 1970, 2008 e 2060**

Fonte: INE, I.P., Censos 1970; Estimativas 2008 e Projecções 2060 (cenário central)

Segundo estudo INE estima-se que entre 1970 e 2008 a população residente tenha aumentado 8 663 milhares para 10 627 milhares de indivíduos, como reflexo da imigração. Prevê-se, na hipótese do cenário central adoptado nas projecções, que a população diminua para cerca de 10 360 milhares de indivíduos, 2060. As mulheres são mais numerosas do que os homens. A população jovem reduz-se a metade, tanto para homens como para mulheres. Ao contrário, as pessoas idosas quadruplicam sendo o acréscimo mais forte nos homens. (Men and Women in Portugal, 2010)



**Ilustração 8 - Idade média ao nascimento do primeiro filho, Portugal, 1972-2008**

Fonte: INE, I.P., Indicadores demográficos

A idade média das mulheres ao nascimento do primeiro filho aumenta continuamente desde o início dos anos oitenta do século passado subindo para 28,4 anos em 2008, ou seja mais 4,9 anos em relação a 1982. (Men and Women in Portugal, 2010)

## 2. FUNDOS E PLANOS DE PENSÕES

O envelhecimento que se tem verificado nos países da Europa Ocidental, nos Estados Unidos e no Japão, desde as duas últimas décadas do século XX, colocou sérios desafios à sustentabilidade financeira dos sistemas públicos de pensões<sup>16</sup>. Todavia, as medidas em

<sup>16</sup> Para uma perspectiva mais aprofundada da situação demográfica que, até 1995, se observava nos então 15 Estados-membros da União Europeia, cfr. A. P. Quelhas, A refundação do papel do Estado nas políticas sociais – a alternativa do movimento mutualista, pp. 72 a 90.

Por seu turno, para uma visão prospectiva, até 2060, dos actuais 27 países da União Europeia, Noruega e Suíça, cfr. K. Giannakouris, «Ageing characterises the demographic perspectives of the European



apreço foram, na maioria dos casos, guiadas unicamente por objectivos de índole financeira, desatendendo ou subestimando os respectivos efeitos no rendimento dos pensionistas e dos idosos em geral.

No contexto das reformas levadas a efeito, incluímos o incentivo – através da concessão de benefícios fiscais – à subscrição, individual ou colectiva, de planos de pensões geridos por entidades privadas, assentes em esquemas de capitalização e tendo por base a poupança voluntária<sup>17</sup>. (Quelhas, 2010)

Ressalve-se, contudo, que em alguns países, por força de condicionalismos históricos e da reduzida intervenção dos Estados na esfera das políticas sociais, as pensões assumem, desde sempre, um papel primordial enquanto mecanismo de protecção na velhice, principalmente as que resultam de um modo de organização colectivo – empresa, grupo de empresas ou sector de actividade.

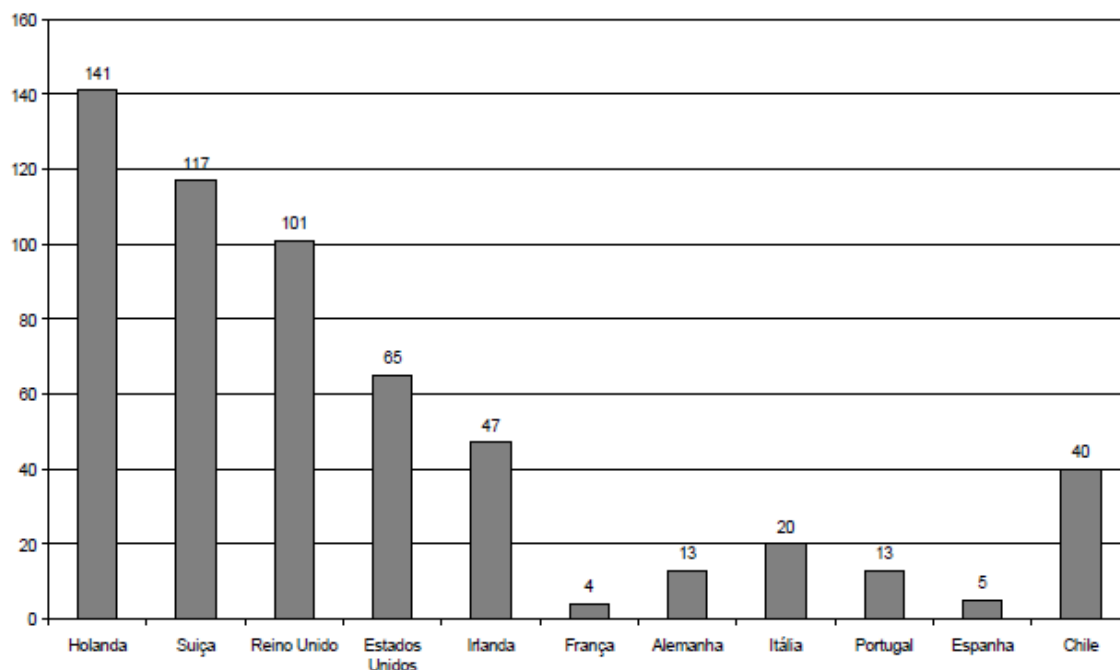
Na Holanda, na Suíça e no Reino Unido, só para referir países europeus, o valor dos activos dos Fundos de Pensões privados representam mais de 100% do PIB. Contrastando com outros esta situação, noutros países, a relevância dos Fundos de Pensões ainda não é significativa devido quer aos sistemas de Segurança Social em vigor – que não deixam espaço para outro tipo de

---

societies», onde, grosso modo, se apontam as seguintes previsões: i) a população total aumentará até 2040, mas cairá até 2060; ii) o número de pessoas com 65 ou mais anos, que em 2008 correspondia a 17,1% da população total, passará a equivaler a 30% dessa população; iii) o número de pessoas com 80 ou mais anos aumentará de 21,8 milhões, em 2008, para 61,4 milhões, em 2060; iv) a idade média da população europeia será de 47,9 anos, em 2060, sendo que, em 2008, essa média era de 40,4 anos. Estes indicadores escondem, porém, diferentes realidades e ritmos de evolução, dada a amplitude da amostra. Em concreto, os valores projectados para Portugal corroboram as previsões avançadas para o agregado da Europa dos 27, Noruega e Suíça. Acresce que, sem prejuízo das peculiaridades inerentes a cada um dos países, as projecções conhecidas para os Estados Unidos e para o Japão confirmam, outrossim, as tendências apontadas para os países europeus. A este título, cfr., respectivamente, J. S. Passel e D. Cohn, U.S. Population Projections: 2005-2050, e R. Kanero, Population prospects of the lowest fertility with the longest life: the new official population projections for Japan and their life course approaches.

<sup>17</sup> Entre alguns académicos permanece a dúvida se as medidas atinentes à promoção dos esquemas privados de pensões devem ser consideradas como meio de reforma dos sistemas públicos. Neste domínio, Myles esclarece que «qualquer compromisso com a gestão d afectação dos custos com o envelhecimento da população envolve não apenas a redefinição dos benefícios provenientes do sector público, mas também o compromisso correspondente à regulação do sector privado de pensões. Os regimes fiscais favoráveis aos instrumentos de poupança reforma relativos ao segundo e terceiro pilar determinam claramente que aos mesmos devam ser atribuídos objectivos sociais.

sistemas -, quer aos regimes fiscais, que não reconhecem, em muitos casos, os esforços das empresas para proporcionar benefícios de reforma aos seus trabalhadores. (Pensões, 2009)



**Ilustração 9 - Activos de pensões em % do PIB**

Fonte: WM, EFRP e AEGFP; valores referidos a 1999

Um **fundo de pensões** é um património autónomo, composto por vários activos financeiros e afecto à realização de um ou mais planos de pensões<sup>18</sup>, sendo essa composição, por norma, legalmente regulamentada; por seu turno, um **plano de pensões** consubstancia-se num conjunto de regras relativas às condições de acesso a um fundo de pensões, bem como os resultados decorrentes da gestão desse fundo, ou seja, ao modo como se constitui o direito ao recebimento de uma pensão a título de reforma.

<sup>18</sup> Acresce que, de acordo com a legislação em vigor, os fundos de pensões podem também estar afectos à realização de planos de benefícios de saúde. No presente contexto, porém, privilegiarei o estudo dos fundos exclusivamente destinados ao financiamento de encargos com pensões de reforma.

## 2.1. FUNDOS E PLANOS DE PENSÕES EM PORTUGAL

Os fundos de pensões foram introduzidos em Portugal por intermédio do Decreto-Lei n.º 323/85, de 6 de Agosto<sup>19</sup>. Contudo, só no ano seguinte, através do Decreto-Lei n.º 396/86, de 25 de Novembro, foram criadas as denominadas sociedades gestoras de fundos de pensões, entidades a quem compete, por excelência, a dinamização deste tipo de mercado.

No espaço de tempo que decorreu entre a regulamentação dos fundos de pensões e o surgimento das respectivas sociedades gestoras, a gestão dos fundos foi confiada às empresas seguradoras do ramo “Vida”. A gestão de fundos de pensões continuou, todavia, a ser uma das actividades permitidas às seguradoras do ramo “Vida”, mesmo após a publicação do Decreto-Lei n.º 396/86. Embora em número muito semelhante, as SGFP têm clara vantagem neste segmento no que concerne aos montantes geridos, tal como podemos verificar os elementos contidos nos quadros seguintes.

**Tabela 4 - Evolução das entidades gestoras de fundos de pensões**

	1987	1993	1998	2002	2006	2008
Seguradoras do ramo «Vida»	10	11	17	15	14	15
Sociedades gestoras de fundos de pensões	5	15	16	13	13	13
<b>TOTAL</b>	15	26	33	28	27	28

Fonte: Instituto Seguros Portugal, publicações várias.

**Tabela 5 - Evolução dos fundos de pensões por tipo de entidade**

	1987	1993	1998	2002	2006	2008
Seguradoras do ramo «Vida»	10	11	17	15	14	15
Sociedades gestoras de fundos de pensões	5	15	16	13	13	13
<b>TOTAL</b>	15	26	33	28	27	28

Fonte: Instituto Seguros Portugal, publicações várias.

---

<sup>19</sup> Sem prejuízo do facto de a primeira referência aos fundos de pensões ter ocorrido, entre nós, por intermédio da Lei n.º 2/71, de 12 de Abril. Porém, à época, observava-se um franco desenvolvimento das coberturas previstas pelos sistemas públicos de Segurança Social, o que, certamente, concorre para explicar o reduzido impacto que teve o sector da previdência privada até meados dos anos oitenta do século XX. De notar, ainda, que a Lei n.º 2/71 nunca foi regulamentada.

	1987	1993	1998	2002	2006	2008
Seguradoras Vida	69.587 [83%]	392.629 [10%]	385.685 [3,3%]	521.520 [3,4%]	549.626 [2,6%]	393.962 [1,9%]
SGFP	14.291 [17%]	3.544.33 8 [90%]	11.192.137 [96,7%]	15.268.196 [96,6]	20.621.363 [97,4%]	19.887.960 [98,1%]
<b>TOTAL</b>	83.878 [100%]	3.936.96 7 [100%]	11.577.822 [100%]	15.789.716 [100%]	21.170.989 [100%]	20.281.922 [100%]

Tabela 6 - Evolução dos montantes geridos por tipo de entidade gestora

Fonte: Instituto Seguros Portugal, publicações várias.

Estes valores evidenciam sobretudo a forte explosão que se verificou em Portugal ao nível dos fundos de pensões, tanto no que se refere ao número de fundos, ao número de entidades gestoras, e muito principalmente, no que concerne aos montantes geridos.

O surgimento das sociedades gestoras de fundos de pensões ocorreu num contexto marcado por fortes transformações operadas ao nível dos sistemas financeiros. Recorrendo à expressão proposta por Boissieu, foi na década de oitenta do séc. XX que, por força dos processos de desintermediação e desregulamentação, também em Portugal, proliferam os denominados “sócias no domínio financeiro”, ou seja, entidades que passaram a exercer funções similares às até então desempenhadas, quase em exclusivo, pelas instituições bancárias<sup>20</sup>. Mais recentemente, foram sendo introduzidas mudanças significativas ao nível do sistema de Segurança Social, susceptíveis de reduzir o nível de pensões a atribuir pelo sistema público. Entre essas alterações, sublinho as que decorrem do Decreto-Lei n.º 35/2002, de 19 de Fevereiro, onde se definiu um novo método de cálculo para o valor das pensões, tomando a carreira contributiva do indivíduo, ao invés dos melhores dez dos últimos quinze anos, anteriormente em vigor.

Refira-se, todavia, o desfasamento temporal entre a adopção de medidas de carácter reformador e a explosão observada no sector dos fundos e dos planos de pensões. Essas medidas foram levadas a efeito sobretudo após o virar do milénio, na senda da Lei de Bases da

---

<sup>20</sup> Cfr. L. M. G. S. Quelhas, Sobre a evolução recente do sistema financeiro – novos “produtos financeiros”, pp. 32 e segs.

Segurança Social de 2000 (Lei n.º 17/2000, de 8 de Agosto)<sup>21</sup>, logo mais tardias que o acréscimo expressivo das quantias geridas pelas entidades gestoras.

Uma das explicações apontadas, de modo quase recorrente, ao longo do tempo, tem-se estribado nos fortes benefícios fiscais decorrentes da subscrição de planos de pensões, até ao ano de 2004. Embora abolidos para o ano de 2005, a lei orçamental para 2006 reintroduziu esse tipo de regalias.

Por seu turno, a nova Lei de Bases da Segurança Social – Lei n.º 4/2007, de 16 de Janeiro – deixa antever novo impulso no âmbito do sector dos fundos de pensões, ao compreender no sistema complementar de Segurança Social os regimes complementares de iniciativa individual e de iniciativa colectiva.

Entre regimes complementares de iniciativa individual encontram-se, de acordo com o texto da lei, os planos de poupança-reforma, os seguros de vida, os seguros de capitalização e as modalidades mutualistas.

No presente, a constituição e o funcionamento dos fundos de pensões e das sociedades gestoras de fundos de pensões são regulados através do Decreto-Lei n.º 12/2006, de 20 de Janeiro. Este diploma transpõe para o ordenamento jurídico nacional os princípios decorrentes da Directiva n.º 2003/41/CE, do Parlamento Europeu e do Conselho, de 3 de Junho, relativa à actividade e à supervisão das instituições encarregues da gestão de fundos de pensões profissionais.

No artigo 2.º deste diploma, prevê-se a existência dos seguintes intervenientes no âmbito do funcionamento dos fundos e dos planos de pensões:

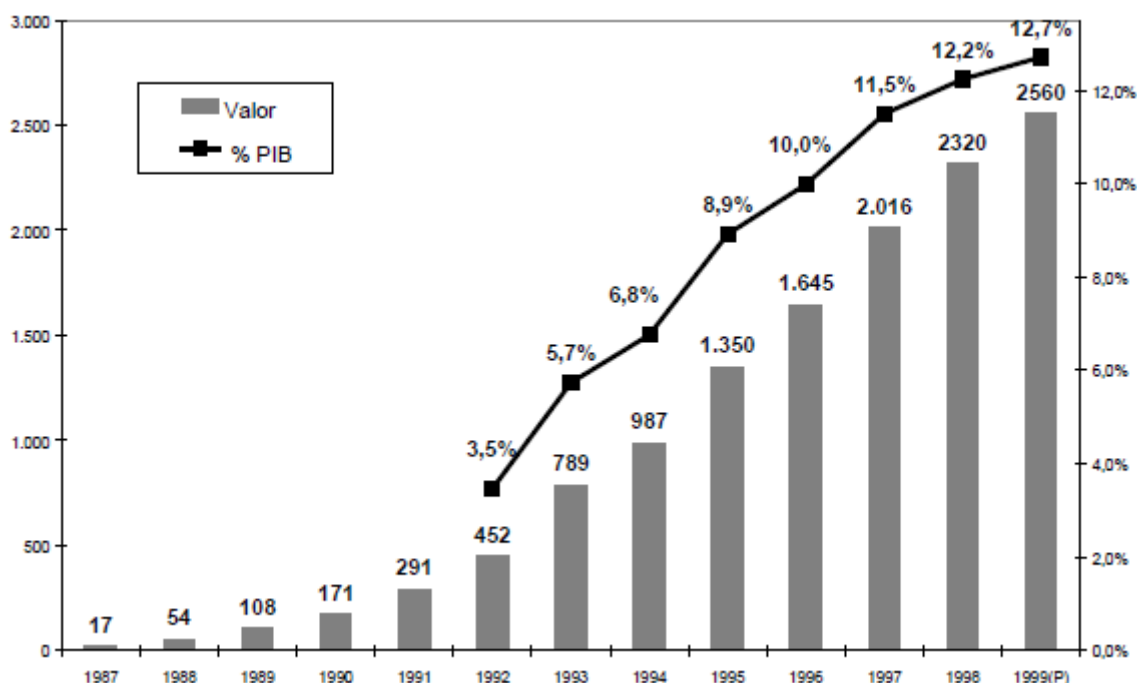
- a) Os *associados* são as pessoas colectivas cujos planos de pensões são financiados por intermédio de um fundo de pensões;
- b) Os *participantes* são as pessoas singulares relativamente às quais se estabelecem os direitos estabelecidos no plano de pensões, independentemente de terem ou não contribuído para o seu financiamento;

---

<sup>21</sup> À qual se seguiu a Lei n.º 32/2002, de 20 de Dezembro. De notar que, no curto espaço de sete anos, vigoraram, entre nós, três diferentes Leis de Bases da Segurança Social.

- c) Os *contribuintes* são as pessoas singulares ou colectivas que realizam contribuições em nome e em favor do participante;
- d) Os *beneficiários* são as pessoas singulares a favor de quem são estabelecidos os direitos considerados no plano de pensões, quer tenham sido ou não participantes;
- e) Os *aderentes* são as pessoas singulares ou colectivas que aderem a um fundo de pensões aberto.

Trata-se, desde logo, de uma classificação generalizante, daí resultando, para o caso nacional, que algumas destas categorias possam surgir sobrepostas no mesmo indivíduo ou na mesma entidade.



**Ilustração 10 - Fundos de pensões em Portugal (em milhares de contos em % do PIB)**

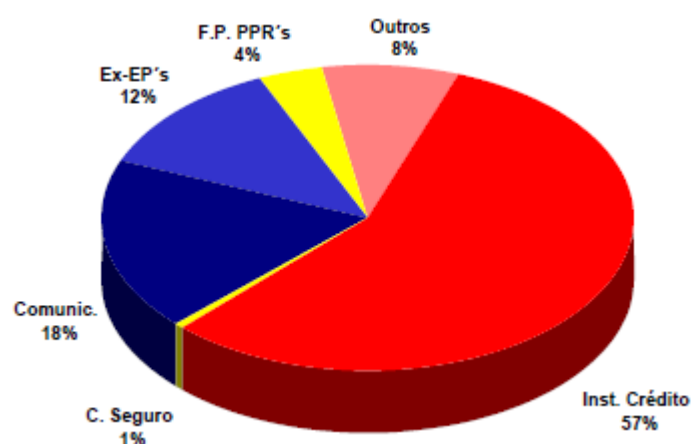
Fonte: AEGFP e ISP

Em Dezembro de 1999, os Fundos de Pensões representavam activos da ordem dos 2.560 milhões de contos, o que correspondia a cerca de 13% do PIB. Para além disso, os Fundos de Pensões abrangem actualmente um universo de cerca de 290.000 participantes, representando 5% da população activa. Durante o ano de 1998, os Fundos de Pensões efectuaram o pagamento de pensões a mais de 90.000 beneficiários, num valor aproximado de 120 milhões de contos, tendo recebido 227 milhões sob a forma de contribuições.

A evolução apresentada, contudo, esconde uma envolvente pouco favorável ao desenvolvimento dos Fundos de Pensões. É que o crescimento acentuado dos activos

registado nos anos mais recentes resultou fundamentalmente das contribuições das instituições de crédito, que devem financiar os seus planos de benefícios por intermédio de Fundos de Pensões, das empresas de correios e telecomunicações, que têm esquemas próprios de pensões, e de um conjunto de outras empresas oriundas do sector público, cujos Planos de Pensões resultaram de acordos de contratação colectiva celebrados enquanto pertencentes ao Sector Empresarial do Estado.

Repare-se que os Fundos de Pensões que têm como associados as entidades referidas detêm mais de 80% do total dos activos financeiros. (Pensões, 2009)



**Ilustração 11 - Activos dos fundos de pensões por empresa associadas (Dezembro 2008)**

Fonte: AEGFP, Estimativas

## **2.2. CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO DOS FUNDOS E DOS PLANOS DE PENSÕES**

De acordo com a legislação em vigor, e tendo essencialmente em atenção o tipo de vínculo que se estabelece entre os vários aderentes, os fundos de pensões distinguem-se entre:

- **Fundos Fechados:** quando respeitarem apenas a um associado; no caso de vários associados; deverá existir, entre eles, uma relação de natureza profissional, associativa, empresarial ou social, sendo, ainda que a adesão de novos associados ocorre em função do consentimento dos primeiros. Os fundos de pensões fechados, são, assim, na sua maioria, fundos promovidos no âmbito de uma empresa ou organização.

- **Fundos Abertos:** quando não for exigida a existência de qualquer tipo de vínculo entre os aderentes, ao mesmo tempo que a adesão depende unicamente da decisão da entidade gestora.

**Tabela 7- Tipos de fundos de pensões em Portugal (Dezembro 1998; valores em milhares de contos)**

Tipos	Número	Montante	
		Valor	Estrutura
Fechados	204	2.195.093	94,6%
Dos quais: 10 maiores (*)		1.658.927	71,5%
Abertos:	29	126.052	5,4%
PPR	14	103.642	4,5%
PPA	3	2.080	0,1%
Outros	12	20.330	0,9%
<b>Total</b>	<b>233</b>	<b>2.321.145</b>	<b>100,0%</b>

\*(Fundos de Pensões com valor superior a 50 milhões de contos)

Fonte: ISP

Em 1998, os Fundos de Pensões, quer em termos de número quer dos montantes geridos, eram maioritariamente fundos fechados, o que é explicado pela dimensão das principais empresas que os promoveram: os bancos e as grandes empresas oriundas do sector público. Os fundos abertos, excluindo o PPR e os PPA<sup>22</sup>, dirigindo-se especialmente às PME's, têm encontrado sérios obstáculos à sua penetração por razões ligadas à fiscalidade da poupança de longo prazo e, como já se fez referência, à Segurança Social. A sua importância, contudo, tem vindo a aumentar acentuadamente tendo, entre 1995 e 1998, o valor dos seus activos sido multiplicado por 4,5. Este crescimento dos Fundos de Pensões abertos também se fica a dever ao comportamento das SGFP que, entre outros factores, passaram a oferecer às empresas fundos com diferentes perfis de risco, mais adequados, portanto, às necessidades de cada plano de pensões.

---

<sup>22</sup> Os Fundos de Pensões PPR e PPA são casos especiais de Fundos de Pensões abertos que apenas permitem adesões individuais.



**Tabela 8 - Fundos de pensões por tipo de plano de pensões em Portugal (Dezembro 1998; valores em milhares de contos)**

<b>Tipo do Plano de Pensões</b>	<b>Número de Fundos/ Adesões Colectivas</b>	<b>Montante Global</b>	<b>Número de Participantes</b>
Fundos de Pensões fechados:	204	2.195.093	190.150
Benefício Definido	191	2.187.214	184.760
Contribuição Definida	9	4.417	4.018
Misto	4	3.462	1.372
Dos quais: Contributivos	16	33.079	12.184
Adesões Colectivas a Fundos de Pensões Abertos:	109	17.662	22.647
Benefício Definido	81	17.127	20.878
Contribuição Definida	28	535	1.769

Fonte: ISP

Analisando a situação existente em Portugal em 1998, ao nível dos tipos de Planos de Pensões, mais uma vez ressalta a importância dos bancos e das empresas de grande dimensão, sendo esmagadora a predominância dos planos de Benefício Definido, que correspondem a cerca de 96% dos fundos fechados. Tem-se notado nos últimos anos, contudo, o surgimento de mais planos de Contribuição Definida, aliás dentro de uma tendência que se vem registando internacionalmente, com os respectivos activos a mais do que duplicarem no espaço de 3 anos, entre 1995 e 1998. Os planos contributivos, que são aqueles que prevêem a existência de contribuições dos trabalhadores, apresentam uma reduzida expressão devido à fiscalidade fortemente desincentivadora.

Tendo, ainda, em consideração, o disposto pelo Decreto-Lei n.º 12/2006, os planos de pensões podem ser classificados, essencialmente, tendo em consideração dois critérios:

- Quanto à **forma de financiamento**;
- Quanto ao **tipo de garantias** que lhes estão associadas.

No que se refere à **forma de financiamento**, os planos de pensões repartem-se entre **planos contributivos**, quando existem contribuições realizadas pelos participantes, e **planos não contributivos**, quando as contribuições ficam unicamente a cargo do associado<sup>23</sup>.

Por sua vez, no que concerne ao **tipo de garantias**, os planos de pensões podem ser classificados como **planos de contribuições definidas**, **planos de benefícios definidos** ou, ainda, **planos mistos**.

Nos planos de contribuições definidas, o montante das entregas a realizar encontra-se antecipadamente estabelecido, dependendo os benefícios futuros do montante dessas entregas e do rendimento que as mesmas possam vir a proporcionar.

Estamos perante a presença de um plano de benefícios definidos quando o montante de benefícios a auferir no futuro se encontra previamente estabelecido, devendo as contribuições ser calculadas de forma a garantir o pagamento desses benefícios. Por último, os planos mistos resultam da combinação das duas fórmulas anteriormente descritas.

Como se referiu, nos **planos de contribuições definidas**, estabelece-se *a priori* o montante das entregas a realizar em cada período. Nesse sentido, os planos de pensões de contribuições definidas são operações de carácter estritamente financeiro, na medida em que o montante acumulado no momento de auferir a pensão de reforma (ou complemento de pensão) dependerá das condições de mercado observadas até então e das decisões de investimento tomadas pelo gestor do respectivo fundo<sup>24</sup>.

Os riscos inerentes aos planos desta natureza são, assim, suportados pelos respectivos membros e resultam da eventual observação dos seguintes dos seguintes factores:

---

<sup>23</sup> Os planos não contributivos são muito comuns nos países anglo-saxónicos, em que o associado é a própria entidade patronal, que realiza as entregas em nome e a favor dos seus trabalhadores.

<sup>24</sup> Na literatura são apontadas diferenças ao nível da estratégia seguida pelos gestores associados a planos de contribuições definidas e a planos de benefícios definidos, no sentido em que os gestores associados a planos de contribuições definidas se encontram sujeitos a menores pressões que os gestores de planos de benefícios definidos, por não terem, necessariamente, que atingir níveis de rentabilidade estabelecidos em momento prévio. Para além disso, os gestores associados a planos de contribuições definidas são, na maioria dos casos, alvo de uma monitorização deficiente por parte dos investidores. A este propósito, cfr. D. Blake, *Pension Schemes and Pension Funds in the United Kingdom*, pp. 472-473.

- Nível e/ou número insuficiente de contribuições vertidas a favor do fundo correspondente;
- Más decisões de investimento por parte do gestor do fundo, das quais procedem baixos índices de retorno;
- Perda de valor dos activos que compõem o fundo;
- Taxas de inflação elevadas, com a consequente quebra do poder de compra relativo aos montantes a receber no futuro.

Ainda assim, e sem prejuízo do que anteriormente se afirmou, os planos de contribuições definidos podem ser desenhados tendo em vista o alcance de um certo nível de pensão (benchmark pension).

Nos ***planos de benefícios definidos***, o montante da pensão a auferir no futuro encontra-se indexado a um determinado valor de referência, por norma, o nível salarial que se prevê que o beneficiário venha a receber no momento de acesso à reforma. Neste tipo de planos, o trabalho do actuário revela-se de particular importância, uma vez que deverá conhecer, em cada momento, o valor actual dos activos que permite o pagamento das responsabilidades futuras, ou seja, dos benefícios que a entidade gestora se comprometeu a atribuir. Tal implica o reconhecimento das variáveis passíveis de influenciar a valorização do plano, o estabelecimento da correspondente base técnica e a constituição de provisões.

Em termos internacionais, tem-se observado, nos últimos anos, uma mudança significativa de planos de benefícios definidos para planos de contribuições definidas, principalmente entre aqueles que são promovidos por empresas.

No que retrata ao caso português, os fundos profissionais assumem um peso significativo, correspondendo a 95,1% do montante total (20.282 milhões de euros, em 2008). Uma análise sectorial revela, ainda, que o sector bancário e o das comunicações e transportes são responsáveis por cerca de 85% dos fundos actualmente existentes. A relevância que os fundos de pensões têm nestes sectores explica-se pelo facto de os respectivos trabalhadores não se encontrarem abrangidos por qualquer sistema público de Segurança Social. Estes fundos são maioritariamente fundos fechados, que correspondem a planos de benefício definido.

A forte concentração não se observa apenas ao nível dos sectores de actividade, já que os 20 maiores fundos de pensões profissionais correspondem a 90% do valor total da sua categoria e a 85,65% do valor total dos fundos.

Também em Portugal se verifica a tendência de transição de planos de benefício definido para planos de contribuição definida, no ano de 2008, os planos de contribuição definida cresceram 28%, contra o decréscimo de 9% registado ao nível dos planos de benefício definido. Convém, no entanto, precisar que, no nosso país, os planos de contribuição definida decorrem, maioritariamente, de iniciativas individuais de poupança voluntária, entre os quais se colocam os bem conhecidos planos poupança-reforma (PPR).

### 2.3. SISTEMA DOS 3 PILARES

As fontes de rendimentos na reforma dos cidadãos podem ser analisadas, de uma forma simples, no contexto do designado “Sistema dos 3 Pilares”. O **1º Pilar** é constituído pelos rendimentos providenciados pelo Estado, ao abrigo de princípios de solidariedade e de redistribuição; o **2º Pilar** corresponde ao rendimento proporcionado pelos Planos de Pensões promovidos pelas empresas ou outras entidades colectivas; o **3º Pilar** é normalmente associado aos rendimentos com origem nas poupanças individuais que foram realizadas ao longo da vida, incluindo os planos de poupança reforma. Há quem refira ainda, a existência de um quarto pilar para abranger os rendimentos dos pensionistas quando estes se mantêm, após a reforma, no mercado do trabalho.

Normalmente os Planos de Pensões<sup>25</sup> correspondentes ao 1º Pilar Público assentam num sistema designado de repartição<sup>26</sup>, no qual as contribuições dos trabalhadores activos não concorrem directamente para a sua reforma, mas sim para o pagamento das pensões dos actuais reformados, na expectativa de que a próxima geração de trabalhadores esteja disposta a fazer o mesmo por eles. Logo, não existe uma relação imediata e directa entre o que o

---

<sup>25</sup> Os planos de Pensões são programas que definem as condições em que se constitui o direito ao recebimento de uma pensão a título de pré-reforma, reforma por velhice, invalidez ou por sobrevivência. O Plano de Pensões regulamenta tudo o que tenha a ver com os aspectos técnicos incluindo a definição dos beneficiários, seus critérios de atribuição, as pessoas cobertas pelo Plano e os pressupostos do cálculo do custo para a entidade que o constitui.

<sup>26</sup> “Pay as You Go”, na linguagem anglo-saxónica. Os mais pessimistas relativamente à sustentabilidade financeira e social destes regimes também os designam de “Pray as You Go”.

trabalhador contribui para o sistema e o que ele vai receber. A segurança Social portuguesa funciona neste regime. É um tipo de sistema cujo financiamento já alguém comparou ao dos conhecidos esquemas piramidais ou de Ponzi, que, na década de 80, ficaram bem conhecidos em Portugal com o caso “D. Branca”.

Para um sistema destes ser sustentável a prazo sem grandes tensões, torna-se necessário que exista uma relação estável entre o número de reformados que recebem pensões e o número de trabalhadores que as financiam.

Para Portugal prevê-se que a relação entre o número de pessoas com mais de 65 anos e o número de pessoas com idade compreendida entre os 15 e os 64 anos, o chamado rácio de dependência, cresça dos actuais 22% para cerca de 47% em 2050. Projecções realizadas para Portugal mostram que com esse aumento do rácio de dependência, o financiamento das pensões irá exigir que as taxas de contribuição que incidem sobre os salários dos trabalhadores sejam multiplicadas por três no espaço de quatro décadas.

O 2º Pilar funciona, como regra geral, em regime de capitalização<sup>27</sup>, com as contribuições das empresas e dos trabalhadores a serem canalizadas para um fundo de pensões. As pensões serão, mais tarde, pagas a partir das contribuições realizadas e dos rendimentos gerados pelo futuro.

Significa isto que enquanto o 1º Pilar público está exposto aos riscos ligados à evolução do mercado de trabalho, incluindo a evolução demográfica, o 2º Pilar em capitalização está mais exposto ao risco do mercado de capitais. As regras para uma sã e prudente gestão do risco aconselhariam, desde logo, a uma diversificação adequada do financiamento dos sistemas nacionais de protecção social pelos dois tipos de regimes<sup>28</sup>. No entanto, não é o que acontece na maior parte dos países da União Europeia.

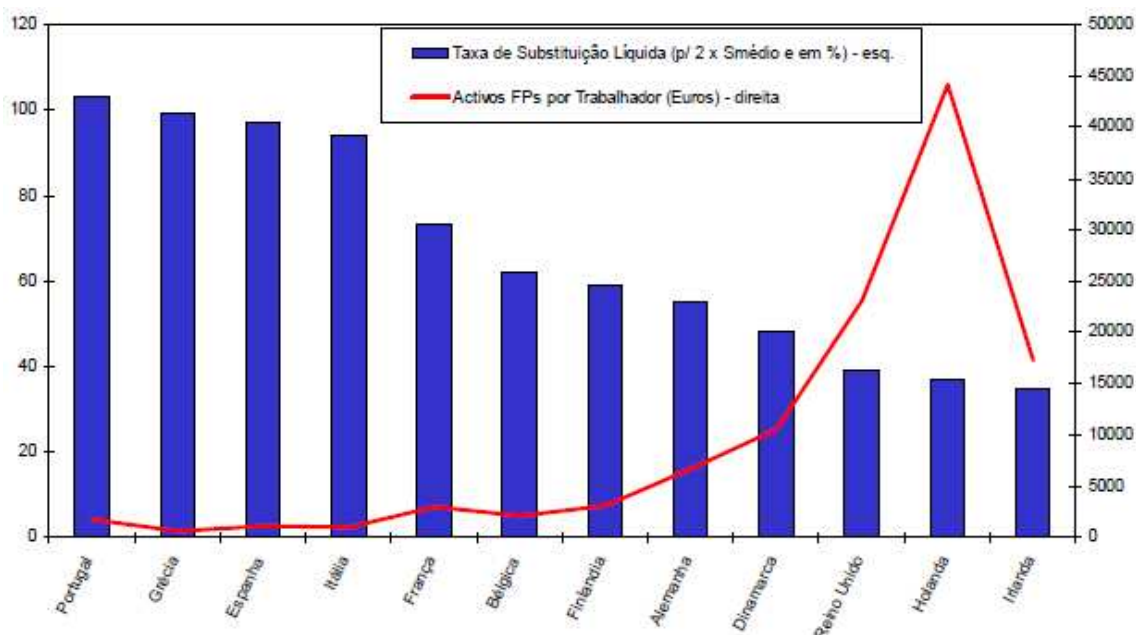
Na União Europeia, os rendimentos na reforma são originados em cerca de 88% pelo 1º Pilar público e 8% pelo 2º Pilar, existindo, no entanto, situações muito diferenciadas entre os países. Evidentemente que naqueles países onde o nível de rendimentos na reforma providenciado pela segurança social pública é muito elevado quando comparado com o nível

---

<sup>27</sup> “Funding” na linguagem anglo-saxónica.

<sup>28</sup> A reforma do sistema polaco de segurança social foi realizada atendendo a esta ideia de diversificação de riscos: “Shaping Reform in Poland: Security Through Diversity”, Paper n.º9923 do Banco Mundial, 1999.

salarial auferido na data da reforma, o peso do 2º Pilar e, portanto, dos Fundos de Pensões é mais reduzido.



**Ilustração 12 - Articulação do 1º e 2º pilares na União Europeia (Taxa de substituição líquida no 1º pilar público e activos dos fundos de pensões por trabalhador para o 2º pilar)**

Fonte: OCDE

Em Portugal, a taxa de substituição líquida (isto é, o valor da pensão a receber da Segurança Social a dividir pelo último salário auferido, ambos líquidos de impostos) poderá atingir os 100%, e em algumas situações a pensão poderá mesmo ultrapassar o último salário. Daí a ainda reduzida expressão dos Fundos de Pensões no nosso país.

### 3. PLANOS DE PENSÕES DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA

Designando por  $F_t$  o montante acumulado, em cada momento  $t$ , por um fundo de pensões de contribuição definida, teremos que

#### Equação 1

$$F_t = F_{t-1} * (1 + i_t) + Q_t$$

com  $i_t$  a notar a rendibilidade registada, nesse período  $t$ , pelo portefólio associado ao fundo e  $Q_t$  a identificar o montante das contribuições realizadas. Logo o montante acumulado no fundo, no final de cada período, vai corresponder ao montante acumulado no período

anterior, capitalizado à taxa média de rendibilidade observada, acrescido do montante das contribuições efectuadas.

Em determinados casos, principalmente nos fundos colectivos, o montante anual das contribuições a realizar a favor do fundo pode corresponder a uma certa percentagem do salário auferido. Sendo  $S_t$  o salário recebido em cada período  $t$  e  $w$  a percentagem desse salário destinada ao fundo, resulta que

$$Q_t = w * S_t$$

Além disso, tomando a expressão estabelecida em [1] e substituindo, vem que

$$F_t = F_{t-1} * (1 + i_t) + w * S_t$$

Tomando vários períodos de tempo e seguindo a formalização proposta por Peláez Feroso e Garcia Conzález<sup>29</sup>, o valor de um fundo de pensões associado a um plano de contribuição definida, em cada momento  $t$ , é dado por

## Equação 2

$$F_t = \sum_{k=0}^{t-1} Q_k * \prod_{h=k}^{t-1} (1 + i_h)$$

tendo  $Q_k$  e  $i_h$  significados idênticos aos já mencionados.

Desta feita, no presente contexto, devemos, sobretudo, reter o que se conhece relativamente às rendas de acumulação certas e temporárias, cuja formalização genérica corresponde a

$$R(n) = T * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

As contribuições realizadas a favor do fundo assumem papel idêntico ao dos termos da renda de acumulação; estas podem ser **constantes**, o que configura o caso de uma renda certa, temporária e de termos constantes, ou **variáveis**, donde decorre uma renda certa, temporária e de termos variáveis.

---

<sup>29</sup> Cfr. F. J. Peláez Hermoso e A. Garcia González, Los planos y fondos de pensiones – un análisis financiero-actuarial, p. 39.

Da capitalização dessas contribuições resultará um determinado montante, a receber num momento específico do tempo, por norma a corresponder à idade de legal de acesso à reforma<sup>30</sup>.

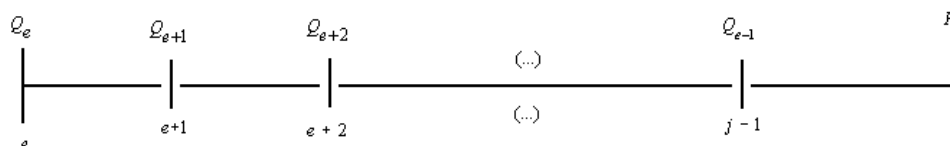
Consequentemente, a quantia acumulada no fundo não depende de quaisquer contingências biométricas – ao contrário do que sucede nos planos de benefício definido, como terei ocasião de discutir adiante – sendo antes unicamente condicionado por factores de natureza financeira, ou seja, pelo montante das entregas ( $Q_k$ ), pelo número de entregas ( $n$ ) e pela rendibilidade das aplicações financeiras afectas ao respectivo fundo ( $i$ ).

Sendo que as prestações futuras não se encontram garantidas, neste tipo de planos não se afigura necessária a constituição de provisões, nem o estabelecimento de quaisquer bases técnicas.

Contemplo, de seguida, as várias possibilidades no que concerne à periodicidade e ao valor das entregas a efectuar para o fundo.

### 3.1. ENTREGAS ANUAIS DE TERMOS CONSTANTES

#### i) Antecipadas



Começo por estabelecer que  $e$  designa a idade de acesso ao mercado de trabalho, sendo esta coincidente com o início de realização das entregas; por sua vez,  $j$  correspondente à idade de acesso à pensão de reforma ou complemento de pensão. O plano de entregas, caso estas sejam antecipadas, surge ilustrado no esquema seguinte.

<sup>30</sup> Blake refere-se à existência de duas fases no âmbito dos planos de contribuição definida: uma fase de acumulação, até que seja atingida a idade de reforma, e uma fase de distribuição, sendo a duração desta última condicionada pelas probabilidades de vida e de morte do beneficiário do plano. Cfr. D. Blake, Pension Finance.



Sendo  $i$  a taxa de rendibilidade anual associada ao fundo, que, por questões de simplificação, pressupomos constante, e  $F_j$  o valor acumulado no momento  $j$ , teremos:

$$F_j = Q_e (1+i)^{j-e} + Q_{e+1} (1+i)^{j-e-1} + Q_{e+2} (1+i)^{j-e-2} + \dots + Q_{j-1} (1+i)$$

Como o valor das entregas é constante, vem que

$$Q_e = Q_{e+1} = Q_{e+2} = \dots = Q_{j-1}$$

cujo termo notamos genericamente por  $Q$ . Assim sendo, podemos traduzir  $F_j$  do seguinte modo:

$$F_j = Q[(1+i)^{j-e} + (1+i)^{j-e-1} + (1+i)^{j-e-2} + \dots + (1+i)]$$

Atendendo ao esquema proposto e às expressões formalizadas, estamos em presença de uma renda de acumulação, composta por  $(j-e)$  entregas constantes e antecipadas. Consequentemente,

### Equação 3

$$F_j = Q * \frac{(1+i)^{j-e} - 1}{i} * (1+i)$$

Ou ainda

### Equação 4

$$F_j = Q * (1+i)^s s_{j-e}$$

Exemplo:

Qual o capital que poderá receber um indivíduo de 65 anos, sendo que, desde os 50 anos, efectuou entregas anuais, constantes e antecipadas, no montante de 5.000€, para um fundo de pensões, sabendo que a respectiva taxa média de rendibilidade é de 3,75% ao ano?

Pretendemos calcular o montante acumulado à idade de 65 anos, logo  $F_{65}$ . Atendendo à expressão formalizada em [3], temos, no caso presente, que  $e=50$ ,  $j=65$  e ainda que  $Q=5.000€$ . Substituindo, obtêm-se

$$F_{65} = 5.000\text{€} * \frac{(1 + 3,75\%)^{65-50} - 1}{3,75\%} * (1 + 3,75\%)$$

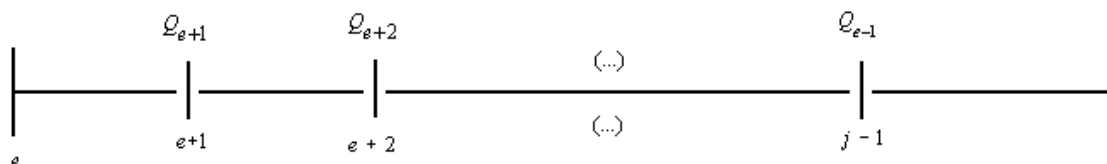
$$F_{65} = 5.000\text{€} * \frac{(1 + 3,75\%)^{15} - 1}{3,75\%} * (1 + 3,75\%)$$

$$F_{65} = 101.963,71\text{€}$$

Ao atingir os 65 anos, o indivíduo poderá receber a quantia de 101.963,71€.

## ii) Postecipadas

Nesta possibilidade, as entregas, sendo postecipadas, reportam-se ao final de cada período, tal como decorre do esquema apresentado<sup>31</sup>.



O montante acumulado em j vai corresponder a

$$F_j = Q_{e+1}(1+i)^{j-e-1} + Q_{e+2}(1+i)^{j-e-2} + \dots + Q_{j-1}(1+i)$$

Ou ainda, uma vez que as entregas são constantes e iguais a Q,

$$F_j = Q[(1+i)^{j-e-1} + (1+i)^{j-e-2} + \dots + (1+i)]$$

Pondo  $(1+i)$  em evidência, vem

$$F_j = Q * (1+i) * [(1+i)^{j-e-2} + (1+i)^{j-e-3} + \dots + 1]$$

A expressão colocada entre parêntesis rectos corresponde à soma dos  $j-e-1$  primeiros termos de uma progressão geométrica de razão  $(1+i)^{-1}$ , logo

---

<sup>31</sup> Embora se trate de uma renda de termos postecipados, não se efectua qualquer entrega no momento j, uma vez que este pode marcar o início da sucessão de recebimentos. Deste modo, a renda em apreço compreenderá  $j-e-1$  termos.

### Equação 5

$$F_j = Q * \frac{(1+i)^{j-e-1} - 1}{i} * (1+i)$$

De outro modo,

### Equação 6

$$F_j = Q * (1+i)^s * s_{j-e-1}$$

Exemplo:

Quanto poderá ter acumulado num fundo de pensões um indivíduo de 55 anos que, desde a idade de 35 anos, efectua, para esse fundo, entregas anuais, constantes e postecipadas, no montante de 1.000€, considerando uma taxa de rendibilidade correspondente a 2,5% ao ano?

Pretendemos conhecer o montante acumulado num certo momento  $t=55$ , pelo que adaptamos a expressão formalizada por intermédio de [5]; atendendo aos dados do problema, virá que

$$F_{55} = 1.000€ * \frac{(1+2,5\%)^{55-35-1} - 1}{2,5\%} * (1+2,5\%)$$

$$F_{55} = 1.000€ * \frac{(1+2,5\%)^{19} - 1}{2,5\%} * (1+2,5\%)$$

$$F_{55} = 24.544,66€$$

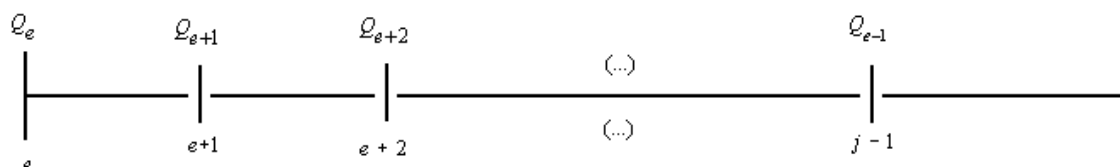
Aos 55 anos, o detentor do fundo terá acumulado a quantia de 24.544,66€.

### 3.2. ENTREGAS ANUAIS DE TERMOS VARIÁVEIS<sup>32</sup>

É pouco provável que o montante das contribuições vertidas a favor do fundo de pensões se mantenha constante, particularmente se atendermos à significativa amplitude de tempo que, por norma, se associa a aplicações desta natureza<sup>33</sup>. A introdução de um parâmetro de variação do montante das contribuições configura, necessariamente, maior aderência à realidade.

#### i) Antecipadas

Retomemos o esquema proposto de início, contemplando, agora, a possibilidade de as entregas anuais assumirem valores variáveis.



Tal como sucedia para a hipótese de contribuições constantes, o valor do fundo no momento  $j$  é dado pelo valor capitalizado das entregas efectuadas, donde

$$F_j = Q_e (1+i)^{j-e} + Q_{e+1} (1+i)^{j-e-1} + Q_{e+2} (1+i)^{j-e-2} + \dots + Q_{j-1} (1+i)$$

Começemos por avaliar a possibilidade de o montante anual das entregas variar em *progressão aritmética de razão  $r_a$* . Consequentemente, em cada momento, essas quantias corresponderão a

$$Q_e$$

<sup>32</sup> Consultar de A. P. Quelhas e F. Correia, Manual de Matemática Financeira, pp. 290-291 e pp. 294-295, no que concerne à dedução das expressões que permitem calcular, respectivamente, o valor acumulado das rendas de termos variáveis em progressão aritmética e o valor acumulado das rendas de termos variáveis em progressão aritmética.

<sup>33</sup> Esta observação ganha particular acuidade se atendermos aos planos de pensões constituídos com base nas poupanças individuais de carácter voluntário, nos quais não é exigida a entrega regular de contribuições, como é, entre nós, o caso do PPR.

$$Q_{e+1} = Q_e + r_e$$

$$Q_{e+2} = Q_{e+1} + r_a = Q_e + 2 * r_a$$

.....

$$Q_{j-1} = Q_{j-2} + r_a = Q_e + (j-e-1) * r_a$$

Cada uma das entregas será, assim, função anterior. Substituindo o valor respectivo na expressão que nos permite obter o montante acumulado pelo fundo no momento j, virá que

$$F_j = Q_e (1+i)^{j-e} + (Q_e + r_a)(1+i)^{j-e-1} + (Q_e + 2 * r_a)(1+i)^{j-e-2} + ..... +$$

$$+ [Q_e + (j-e-1) * r_a](1+i)$$

A expressão anterior corresponde ao valor acumulado de uma renda de j-e termos anuais, antecipados e variáveis em progressão aritmética de razão  $r_a$ . Recordando a formalização das rendas de termos variáveis, estabelecemos que o montante acumulado pelo fundo no momento j será dado por

#### Equação 7

$$F_j = Q_{e+1} * \frac{(1+i)^{j-e-1} - (1+s)^{j-e-1}}{i-s} * (1+i)$$

Exemplo:

Aos 50 anos, certo indivíduo efectuou uma entrega para um plano de pensões no montante de 1.000€, tendo, nos anos seguintes e até atingir a idade de reforma, acrescido a sua contribuição em 100€ por ano. Considerando que a rendibilidade média anual associada ao respectivo fundo ronda os 2,85%, qual o montante de que este indivíduo poderá dispor ao atingir a idade de 65 anos?

Temos que o montante da primeira entrega realizada é de 1.000€, aumentando 100€ em cada ano; consequentemente,  $Q_e=1.000€$  e  $r_a=100€$ . Sucede, ainda, que  $e=50$  e  $j=65$ . Logo, atendendo à expressão anterior, vem que

$$F_j = \left[ \left( 1000\text{€} + \frac{100\text{€}}{2,85\%} \right) \left( \frac{(1 + 2,85\%)^{65-50} - 1}{2,85\%} \right) - \left( \frac{(65-50) * 100\text{€}}{2,85\%} \right) \right] * (1 + 2,85\%)$$

$$F_{65} = (4.508,77\text{€} * 18,39575119 - 52.631,58\text{€}) * 1,0285$$

$$F_{65} = 31.174,48\text{€}$$

O montante de que o indivíduo poderá dispor ascende a 31.174,48€.

Tomemos agora a hipótese de o montante das entregas variar e *progressão geométrica de razão*  $r_g$ . Assim sendo, cada uma das entregas assumirá os valores seguintes:

$$Q_e$$

$$Q_{e+1} = Q_e + r_g$$

$$Q_{e+2} = Q_{e+1} + r_g = Q_e + 2 * r_g$$

.....

$$Q_{j-1} = Q_{j-2} + r_g = Q_e * r_g^{j-e-1}$$

Se estabelecermos que o montante das entregas depende da evolução dos salários, considerando a taxa média de crescimento dos salários, teremos que

$$Q_{e+1} = Q_e (1+s)$$

$$Q_{e+2} = Q_{e+1} (1+s) = Q_e (1+s)^2$$

.....

$$Q_{j-1} = Q_{j-2} (1+s) = Q_e (1+s)^{j-e-1}$$

Donde ocorre que o valor acumulado pelo fundo no momento  $j$ , pressupondo que o montante das entregas evolui de acordo com o crescimento médio dos salários<sup>34</sup>, vai corresponder a

#### Equação 8

$$F_j = Q_e * \frac{(1+i)^{j-e} - (1+s)^{j-e}}{1-s} * (1+i)$$

Exemplo:

Quanto deverá acumular num fundo de pensões quando o subscritor atingir a idade de 65 anos, atendendo às seguintes condições:

- A primeira entrega ascendeu a 500€ e foi efectuada quando o subscritor tinha 37 anos;
- As entregas seguintes evoluíram de acordo com a inflação observada, à taxa média anual de 1,5%;
- A rentabilidade média anual rondou os 2%?

Neste caso, a taxa de inflação surge equiparada ao ritmo de crescimento dos salários; logo, ao aplicarmos a expressão anterior, vem que

$$F_{65} = 500€ * \frac{(1+2\%)^{65-37} - (1+1,5\%)^{65-37}}{1-1,5\%} * (1+2\%)$$

$$F_{65} = 500€ * 44,7604 * 1,02$$

$$F_{65} = 22.827,81€$$

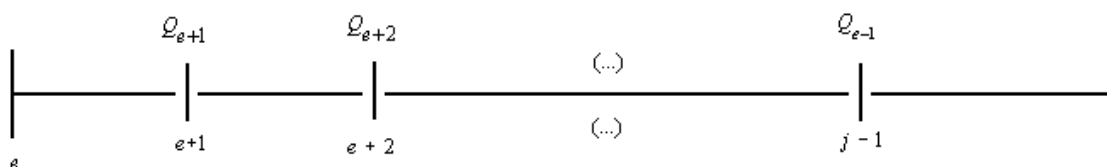
De acordo com as condições definidas, deverão estar acumuladas no fundo 22.827,81€.

#### ii) Postecipadas

Se considerarmos, agora, que as entregas a favor do fundo são postecipadas, em termos esquemáticos, virá que

---

<sup>34</sup> Para um valor genérico de  $r_g$  virá que  $F_j = Q_e * \frac{(1+i)^{j-e} - r_g^{j-e}}{1+i-r_g} * (1+i)$



Tal como referi anteriormente para o caso das entregas constantes, a primeira entrega ocorre no momento  $e+1$ , enquanto a última se reporta ao momento  $j-1$ ; são, assim, realizadas  $j-e-1$  contribuições a favor do fundo. Se essas contribuições variarem em progressão aritmética de razão  $r_a$ , dada a similitude existente entre o caso proposto e o anteriormente apresentado para a eventualidade de as entregas serem antecipadas, assumiremos, simplesmente, que

#### Equação 9

$$F_j = \left[ \left( Q_{e+1} + \frac{r_a}{i} \right) \left( \frac{(1+i)^{j-e-1} - 1}{i} \right) - \frac{(j-e-1) * r_a}{i} \right] * (1+i)$$

Esta expressão permite calcular o **valor acumulado no fundo no momento  $j$ , resultante da capitalização das  $j-e-1$  entregas variáveis em progressão aritmética de razão  $r_a$** , reportando-se a primeira dessas entregas ao momento  $e+1$ . Ilustremos a situação proposta recorrendo a um exemplo.

Exemplo:

Quanto deverá estar acumulado num fundo de pensões quando o respectivo contribuinte atingir a idade de 60 anos, sabendo que:

- Esse contribuinte conta hoje com 40 anos;
- A primeira entrega será no montante de 750€ e ocorrerá daqui por um ano;
- De modo a compensar os eventuais efeitos da inflação, o contribuinte acrescerá, em cada ano, a quantia de 25€ à sua contribuição anual;
- Prevê-se que a taxa média de rentabilidade associada ao fundo, para o período de tempo considerado, atinja os 2,75%?

Estamos, inequivocamente, em presença de um caso de entregas postecipadas – pelo facto de a primeira entrega ocorrer daqui por um ano – e variáveis em progressão aritmética – já que se observam acréscimos anuais de 25€. O problema resolve-se, assim, facilmente através da



aplicação da formula estabelecida em [9], adaptada para t=60. Para o efeito, consideramos, ainda, e=40, donde resulta que

$$F_{60} = \left[ (750\text{€} + \frac{25\text{€}}{2,75\%}) \left( \frac{(1+2,75\%)^{60-40-1} - 1}{2,75\%} \right) - \frac{(60-40-1) * 25\text{€}}{2,75\%} \right] * (1+2,75\%)$$

Efectuando os cálculos, obtém-se

$$F_{60} = (1.659,09\text{€} * 24,523 - 17.272,73\text{€}) * 1,027\%$$

$$F_{60} = 24.057\text{€}$$

Esta será, então, a quantia acumulada à idade de 60 anos.

Se, de outro modo, as contribuições variarem em **progressão geométrica de razão  $r_g$** , o esquema das entregas será idêntico ao anteriormente proposto, pelo que escuso de o repetir. No que concerne à dedução da fórmula, adoptei o mesmo tipo de procedimento, assumindo simplesmente que, na eventualidade de as contribuições serem postecipadas, podemos estabelecer

#### Equação 10

$$F_j = Q_{e+1} * \frac{(1+i)^{j-e-1} - (1+s)^{j-e-1}}{i-s} * (1+i)$$

Mais uma vez, para efeitos ilustrativos, recorri a um exemplo.

Exemplo:

Consideremos os elementos apresentados no exemplo anterior. Qual das situações permite obter maior valor acumulado à idade de 60 anos: considerar as entregas efectuadas nas condições descritas ou indexar essa variação à taxa de crescimento dos salários, estimando-se que esta se venha a situar nos 3% ao ano?

Se as entregas variarem em função da taxa de crescimento dos salários, estaremos perante uma progressão geométrica de razão (1+s). Ajustamos [10] para t=60, donde

$$F_{60} = 750\text{€} * \frac{(1+2,75\%)^{60-40-1} - (1+3\%)^{60-40-1}}{2,75\% - 3\%} * (1+2,75\%)$$

$$F_{60} = 750\text{€} * \frac{(1+2,75\%)^{19} - (1+3\%)^{19}}{2,75\% - 3\%} * (1+2,75\%)$$

$$F_{60} = 750\text{€} * 31,64926 * 1,0275$$

$$F_{60} = 24.389,71\text{€}$$

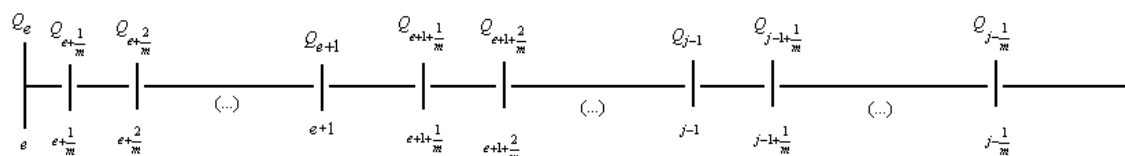
Comparamos o valor assim obtido com o que decorre do exemplo anterior – 24.057€ -, o que nos permite concluir que a entrega de quantias indexadas ao ritmo de crescimento dos salários, para os valores em apreço, permite ter acumulado um montante superior à idade de 60 anos.

### 3.3. ENTREGAS FRACCIONADAS DE TERMOS CONSTANTES

As contribuições efectuadas a favor de um plano de pensões cuja periodicidade não coincide com o ano designam-se por **entregas fraccionadas**. Em termos genéricos, poder-se-á afirmar que estamos em presença de uma renda fraccionária sempre que a periodicidade das entregas não coincidir com o período a que se reporta a rendibilidade do fundo. Porém, a rendibilidade associada aos vários produtos financeiros é, por norma, divulgada para cada ano civil; por isso, considero que o fraccionamento reportará sempre a parcelas do ano.

#### i) Antecipadas

O esquema seguinte ilustra a possibilidade de essas entregas se reportarem ao início de cada período de tempo, consequentemente, de serem **antecipadas**. Em cada ano, irão ocorrer  $m$  entregas, correspondendo, cada uma delas, à  $e$ -ésima parte do ano.



O valor acumulado pelo fundo no momento  $j$  será obtido através da expressão

$$\begin{aligned}
F_j = & Q_e (1+i)^{j-e} + Q_{e+\frac{1}{m}} (1+i)^{j-e-\frac{1}{m}} + \dots + Q_{e+1} (1+i)^{j-e-1} + \\
& + Q_{e+1+\frac{1}{m}} (1+i)^{j-e-1-\frac{1}{m}} + \dots + Q_{j-1} (1+i) + Q_{j-1+\frac{1}{m}} (1+i)^{1-\frac{1}{m}} + \dots + \\
& + Q_{j-\frac{1}{m}} (1+i)^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}$$

ou, atendendo a que as entregas são constantes,

$$\begin{aligned}
F_j = & Q_e (1+i)^{j-e} + Q (1+i)^{j-e-\frac{1}{m}} + \dots + Q (1+i)^{j-e-1} + \\
& + Q (1+i)^{j-e-1-\frac{1}{m}} + \dots + Q (1+i) + Q (1+i)^{1-\frac{1}{m}} + \dots + Q (1+i)^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}$$

Da análise da expressão anterior, concluímos que, ao longo do período em apreço, foram realizadas  $m^*(j-e)$  entregas a favor do fundo. Quer isto dizer que a expressão que permite determinar  $F_j$  pode ser obtida, de modo simplificado, por analogia com a expressão estabelecida por intermédio de [5], considerando, agora, a taxa de juro efectiva para o período  $m$  que é equivalente à rendibilidade anual do fundo<sup>35</sup>. Contempladas as necessárias adaptações, vem que

#### **Equação 11**

$$F_j = Q * \frac{(1+i_m)^{m^*(j-e)} - 1}{i_m} * (1+i_m)$$

com  $i_m$  a notar a rendibilidade efectiva do fundo reportada à e-mésima parte do ano. Ilustramos esta simplificação através de um exemplo.

---

<sup>35</sup> Este procedimento é válido para qualquer renda, de amortização ou de acumulação, de termos certos e fraccionados.

Exemplo:

João, de 50 anos, pretende realizar, no início de cada mês, entregas para um fundo de pensões, até que atinja a idade da reforma (65 anos). Considerando que, em cada ano, João poderá dispor de 600€ e que se estima que a rentabilidade média anual do fundo ronde os 4,5%, determine o montante que será possível acumular.

Começamos por repartir proporcionalmente o investimento anual, isto é,

$$Q = \frac{600\text{€}}{12} = 50\text{€}$$

Do mesmo modo, tomando a rentabilidade anual esperada para o fundo, calculamos a rentabilidade que lhe equivale para o período das entregas, onde

$$i_{\text{mensal}} = (1 + 4,5\%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,36748\%$$

Temos, ainda, que  $m \cdot (j - e) = 12 \cdot (65 - 50) = 180$ , donde se conclui que irão ocorrer, no período previsto, 180 entregas. Tomando a expressão formalizada em [11] e substituindo os valores correspondentes, obtém-se

$$F_{65} = 50\text{€} \cdot \frac{(1 + 0,36748\%)^{12 \cdot (65 - 50)} - 1}{0,36748\%} \cdot (1 + 0,36748\%)$$

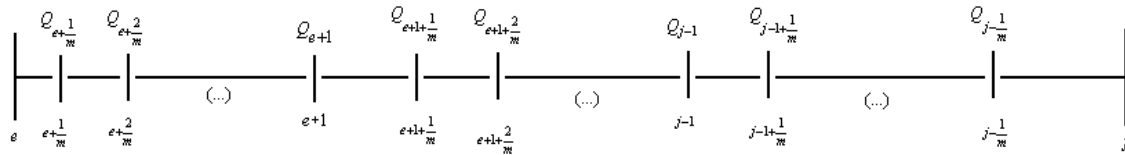
$$F_{65} = 50\text{€} \cdot \frac{(1 + 0,36748\%)^{180} - 1}{0,36748\%} \cdot (1 + 0,36748\%)$$

$$F_{65} = 12.772,34\text{€}$$

Poder-se-á obter um montante acumulado de 12.772,34€.

## ii) Postecipadas

Existe uma forte semelhança entre o caso descrito no ponto anterior e aquilo que sucede na eventualidade de as condições ocorrerem no final do período – entregas **postecipadas**.



De acordo com o esquema anterior, estaremos em presença de um número de entregas igual a  $[m*(j-e)-1]$ , pelo que a formula proposta em [11] dará agora lugar a

### Equação 12

$$F_j = Q * \frac{(1+i_m)^{m*(j-e)-1} - 1}{i_m} * (1+i_m)$$

Exemplo:

Reconsideremos os elementos apresentados no exemplo anterior. Refaça os cálculos no pressuposto de que as entregas ocorrem, agora, no final de cada mês.

Temos, então, 179 entregas, uma vez que  $[m*(j-e)-1]=12*(65-50)-1=179$ . Todos os restantes elementos são idênticos aos considerados no exemplo anterior, pelo que

$$F_{65} = 50€ * \frac{(1+0,36748\%)^{12*(65-50)-1} - 1}{0,36748\%} * (1+0,36748\%)$$

$$F_{65} = 50€ * \frac{(1+0,36748\%)^{179} - 1}{0,36748\%} * (1+0,36748\%)$$

$$F_{65} = 12.675,58€$$

O montante acumulado é, agora, de 12.675,58€, necessariamente menor que no exemplo anterior<sup>36</sup>.

<sup>36</sup> Veja-se que a diferença existente entre este montante e o encontrado no exemplo anterior é de 96,76€, que é igual ao montante que resulta da capitalização da quantia de 50€, durante 180 períodos de tempo, à taxa mensal considerada. Em termos genéricos, podemos estabelecer que a diferença entre os valores acumulados por uma renda antecipada e por uma renda postecipada, sendo idênticos os restantes parâmetros, corresponde a  $Q(1+i_m)^{m*(j-e)}$ .

### 3.4. ENTREGAS FRACCIONADAS DE TERMOS VARIÁVEIS

Caso as entregas sejam variáveis poder-se-á seguir idêntico raciocínio ao proposto para o caso das entregas anuais variáveis – tanto em progressão aritmética como em progressão geométrica – na eventualidade de essa variação ocorrer entrega a entrega, isto é, de a razão ser aplicada a todos os termos, período a período, de modo sucessivo. Em termos genéricos, sendo as entregas variáveis em progressão aritmética, tem-se que

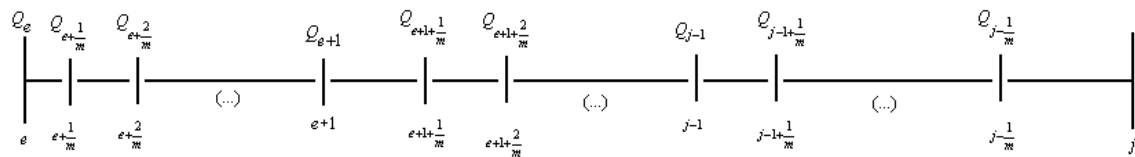
$$Q_{e+k+\frac{t+1}{m}} = Q_{e+k+\frac{t}{m}} + r_{am}$$

Por sua vez, se as entregas variarem em progressão geométrica, surge

$$Q_{e+k+\frac{t+1}{m}} = Q_{e+k+\frac{t}{m}} + r_{gm}$$

Mais uma vez, recorrendo ao mecanismo de simplificação adoptado na secção anterior, poderemos obter as expressões que nos permitem calcular o valor acumulado no momento j, para as entregas antecipadas ou postecipadas, variáveis em progressão aritmética ou em progressão geométrica, através da adaptação das expressões que estabelecemos de [7] a [10] e no pressuposto de que nenhuma entrega é igual a qualquer outra.

O esquema seguinte patenteia a possibilidade de as contribuições serem antecipadas, logo concluímos que se irão realizar  $m*(j-e)$  entregas.



As expressões formalizadas em [13] e [14] permitem calcular o valor acumulado no fundo no momento j, no caso de as entregas variarem, respectivamente, em progressão aritmética e em progressão geométrica

#### Equação 13

$$F_j = \left[ \left( Q_e + \frac{r_{am}}{i_m} \right) \left( \frac{(1+i_m)^{m*(j-e)} - 1}{i_m} \right) - \frac{m*(j-e)*r_{am}}{i_m} \right] * (1+i_m)$$

#### Equação 14

$$F_j = Q_e * \frac{(1+i_m)^{m*(j-e)} - (1+s_m)^{m*(j-e)}}{i_m - s_m} * (1+i_m)$$

Os exemplos seguintes permitem aplicar as expressões propostas.

Exemplo (I):

Entre os 60 e os 65 anos, um indivíduo efectuou entregas mensais para um plano de pensões e contribuição definida, nas seguintes condições:

- A primeira entrega foi antecipada e no montante de 20€;
- Essas entregas aumentam 2€ em cada mês decorrido;
- A taxa de rendibilidade anual associada a este investimento é de 4,8%.

Pretende-se saber quanto estará acumulado no respectivo fundo quando o indivíduo complementar 65 anos.

Uma vez que o montante das entregas cresce 2€ em cada mês, teremos que  $r_{am}=2$ ; por sua vez, calculamos  $i_m=(1+4,8\%)^{1/12}-1=0,39146\%$ , sendo, ainda, que  $Q_{60}=20\text{€}$ . No período em questão, ocorrem  $12*(65-60)$  entregas.

Substituindo estes valores na expressão indicada em [13], vem

$$\begin{aligned} F_{65} &= \left[ (20\text{€} + \frac{2\text{€}}{0,39146\%}) \left( \frac{(1+0,39146\%)^{12*(65-60)} - 1}{0,39146\%} \right) - \frac{12*(65-60)*2\text{€}}{0,39146\%} \right] * (1+0,39146\%) \\ &= (530,91\text{€} * 67,48381453 - 30.645,47\text{€}) * (1+0,39146\%) \\ &= 5.202,65\text{€} \end{aligned}$$

A quantia acumulada no fundo à idade de 65 anos será de 5.202,65€.

Exemplo (II):

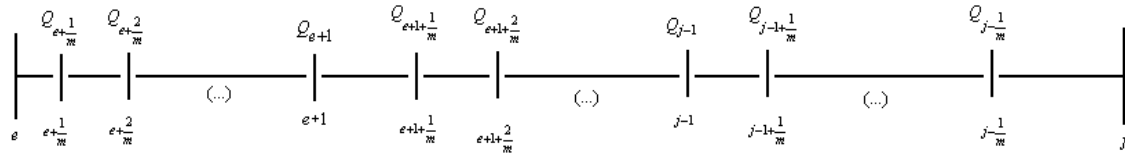
Retome os dados do problema anterior. Calcule o valor acumulado quando o individuo atingir os 65 anos, na eventualidade de o montante das contribuições aumentar 0,2% em cada mês.

As contribuições vão crescer em progressão geométrica de razão igual a 1,002; como as contribuições são mensais – 60 no seu todo, tal como no caso anterior – assumimos que  $s_m=0,2\%$ , mantendo-se  $i_m=0,39146\%$ . Substituindo em [14], vem

$$F_{65} = 20€ * \frac{(1+0,39146\%)^{[12(65-60)-1]} - (1+0,2\%)^{[12(65-60)-1]}}{0,39146\% - 0,2\%} * (1+0,39146\%) = 1.434,72€$$

O valor obtido para a idade de 65 anos é muito menor nesta possibilidade do que quando as contribuições variam em progressão aritmética de razão igual a 2€. Na verdade, no caso anterior, as entregas atingem valores muito elevados comparativamente com a base (a última entrega vai corresponder a  $20€+59*2€=138€$ , o que não sucede quando estas crescem à taxa mensal de 0,2%, sendo a ultima no montante de  $20€*(1+0,2\%)^{59}=22,50€$ .

O próximo esquema refere-se à possibilidade de as contribuições serem postecipadas,  $[m*(j-e)-1]$  no total.



As expressões que permitem calcular  $F_j$  na condição de as entregas evoluírem em progressão aritmética e em progressão geométrica são as que se indicam, respectivamente, através de [15] e [16].

#### Equação 15

$$F_j = \left[ \left( Q_{e + \frac{1}{m}} + \frac{r}{i_m} \right) \left( \frac{(1+i_m)^{m(j-e)-1} - 1}{i_m} \right) - \frac{[(m(j-e)-1)*r]}{i_m} \right] * (1+i_m)$$

#### Equação 16

$$F_j = Q_{e + \frac{1}{m}} * \frac{(1+i_m)^{[m(j-e)-1]} - 1(1+s_m)^{[m(j-e)-1]}}{i_m - s_m} * (1+i_m)$$



Exemplo:

Reconsidere os exemplos (I) e (II), apresentados no início da presente secção, relativos à eventualidade de as entregas serem antecipadas e variáveis, respectivamente, em progressão aritmética e em progressão geométrica. Refaça os cálculos, no pressuposto de que as entregas são, agora, postecipadas.

I) De acordo com os dados do problema, as entregas ocorrerão mensalmente, entre os 60 anos e os 65 anos, sendo a primeira delas no montante de 20€ e aumentado 2€ em cada um dos meses seguintes. Pretendendo conhecer o montante acumulado no fundo quando o detentor do plano tiver 65 anos, aplica-se, de modo directo, a expressão formalizada em [15], donde

$$F_j = \left[ \left( Q_e + \frac{1}{m} + \frac{r}{i_m} \right) \left( \frac{(1+i_m)^{[m(j-e)-1]} - 1}{i_m} \right) - \frac{[m(j-e)-1] * r}{i_m} \right] * (1+i_m)$$

$$F_j = \left[ \left( 20\text{€} + \frac{2\text{€}}{0,39146\%} \right) \left( \frac{(1+0,39146\%)^{12(65-60)-1} - 1}{0,39146\%} \right) - \frac{[12(65-60)-1] * 2\text{€}}{0,39146\%} \right] * (1+0,39146\%)$$

Também aqui  $i_m$  ou seja, a rendibilidade efectiva mensal, será de 0,39146%, uma vez que  $i=4,8\%$ . Retomando os cálculos, vem que

$$F_j = (530,91\text{€} * 66,224571822 - 30.143,57\text{€}) * (1+0,39146\%)$$

$$F_j = 5.035,35\text{€}$$

II) Estamos em presença do mesmo problema que no caso anterior, sendo agora que as entregas crescem 0,2% em cada mês. Assim sendo, de acordo com [16], vem que

$$F_{65} = Q_e + \frac{1}{12} * \frac{(1+i_{12})^{[12(65-60)-1]} - (1+s_{12})^{[12(65-60)-1]}}{i_{12} - s_{12}} * (1+i_{12})$$

$$F_{65} = 20\text{€} * \frac{(1+0,39146\%)^{[12(65-60)-1]} - (1+0,2\%)^{[12(65-60)-1]}}{0,39146\% - 0,2\%} * (1+0,39146\%)$$

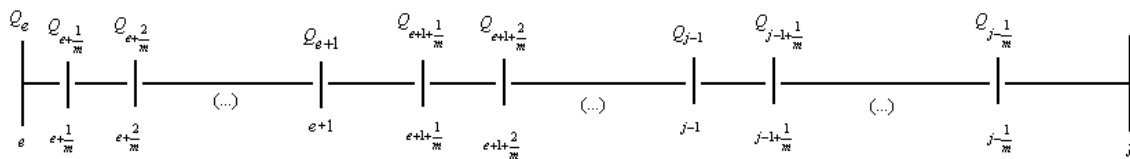
$$F_{65} = 20€ \frac{(1+0,39146\%)^{59} - (1+0,2\%)^{59}}{0,39146\% - 0,2\%} * (1+ 0,39146\%)$$

$$F_j = 20€ * 71,2718464 * (1+ 0,39146\%)$$

$$F_{65} = 1.406,63€$$

Sucedee, porém, que em termos práticos e na maioria das vezes, o montante das entregas permanece constante ao longo de cada ano, indo modificar-se no ano seguinte. Retomemos o esquema inicialmente proposto para o caso das entregas antecipadas e vejamos como se determina, nestas circunstâncias, o valor acumulado pelo fundo no momento  $j$ . Contemplaremos, apenas, a hipótese de as contribuições vertidas em cada ano variarem em progressão geométrica.

i) Antecipadas



Da observação do esquema decorre que o valor acumulado pelo fundo no momento  $j$  se obtém através de

$$F_j = Q_e (1+i)^{j-e} + Q_{e+\frac{1}{m}} (1+i)^{j-e-\frac{1}{m}} + \dots + Q_{e+1} (1+i)^{j-e-1} +$$

$$+ Q_{e+1+\frac{1}{m}} (1+i)^{j-e-1-\frac{1}{m}} + \dots + Q_{j+1} (1+i) + Q_{e+1+\frac{1}{m}} (1+i)^{1-\frac{1}{m}} + \dots +$$

$$+ Q_{j-\frac{1}{m}} (1+i)^{\frac{1}{m}}$$

No entanto, temos que

$$Q_e = Q_{e+\frac{1}{m}} = Q_{e+\frac{2}{m}} = \dots = Q_{e+\frac{m-1}{m}}$$

$$Q_{e+1} = Q_{e+1+\frac{1}{m}} = Q_{e+1+\frac{2}{m}} = \dots = Q_{e+1+\frac{m-1}{m}} = Q_e * r_g$$

e assim por diante, sendo

$$Q_{j-1} = Q_{j-1+\frac{m-1}{m}} = Q_{j-1+\frac{2}{m}} = \dots = Q_{j-\frac{1}{m}} = Q_e * r_g^{j-e-1}$$

Embora os termos referentes a cada ano sejam iguais, cada um deles capitalizará por período de tempo diferente, já que as entregas se reportam também a diferentes momentos do tempo. Se reagruparmos as diversas entregas atendendo ao ano em que são realizadas e expressarmos cada termo em função do primeiro, vem que

$$\begin{aligned} F_j = & Q_e [(1+i)^{j-e} + (1+i)^{j-e-\frac{1}{m}} + \dots + (1+i)^{j-e-\frac{m-1}{m}}] + \\ & + Q_e [r_g (1+i)^{j-e-1} + r_g (1+i)^{j-e-1-\frac{1}{m}} + \dots + r_g (1+i)^{j-e-1-\frac{m-1}{m}}] + \dots \\ & \dots + Q_e [r_g^{j-e-1} (1+i)^{\frac{m-1}{m}} + \dots + r_g^{j-e-1} (1+i)^{\frac{1}{m}}] \end{aligned}$$

O desenvolvimento e a conseqüente transformação da expressão permite estabelecer que

#### Equação 17

$$F_j = m * Q_e^m * \frac{i}{i^m} * (1+i)^{\frac{1}{m}} * \frac{(1+i)^{j-e} - (1+i)^{\frac{1}{m}}}{i - s}$$

Em que  $Q_e^m$  corresponde à entrega proporcional para o período m, isto é,  $Q_e^m = \frac{Q_e}{m}$ , sendo  $i^m$  a taxa anual nominal que, para um período de capitalização m, permite obter uma taxa efectiva anual igual a i. Tomemos um pequeno exemplo que ilustra a situação descrita.

Exemplo:

No início de cada trimestre, um indivíduo de 40 anos realiza entregas para um plano de contribuição definida. No 1º ano, essas entregas assumem o montante global de 3.200€, sendo que crescerão, nos anos seguintes, a uma taxa de 3%, que corresponde à estimativa de variação dos salários. Considerando uma rentabilidade média anual de 3,8%, determine o montante acumulado no respectivo fundo quando o indivíduo atingir a idade de 62 anos.

Transformamos a expressão formalizada em [17], uma vez que  $t=62$ , donde

$$F_j = m * Q_e^m * \frac{i}{i^m} * (1+i)^{\frac{1}{m}} * \frac{(1+i)^{t-e} - (1+s)^{t-e}}{i-s}$$

$$Q_{40}=3.200\text{€}, \text{ logo como as entregas são trimestrais, } \frac{Q_e}{4} = \frac{3.200\text{€}}{4} = 800\text{€}.$$

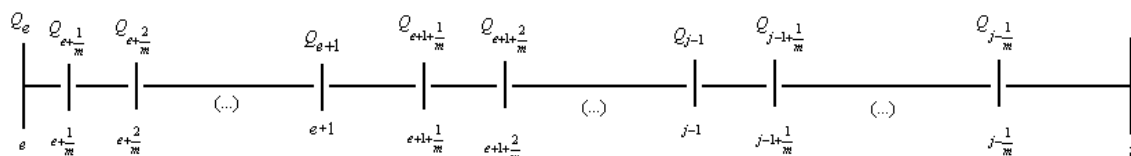
Por sua vez,  $i^4 = 4 * [(1+3,8\%)^{\frac{1}{4}} - 1] = 4 * 0,936755\% = 3,747\%$ , que é a taxa nominal anual com capitalização trimestral que proporciona uma rentabilidade efectiva anual de 3,8%. Substituindo na fórmula, vem

$$F_{62} = 4 * 800\text{€} * \frac{3,8\%}{3,747\%} * (1+3,8\%)^{\frac{1}{4}} * \frac{(1+3,8\%)^{62-40} - (1+3\%)^{62+40}}{3,8\% - 3\%}$$

$$F_{62} = 3.200\text{€} * 1,014144649 * 1,00936755 * \frac{(1,038)^{22} - (1,03)^{22}}{0,038 - 0,03}$$

$$F_{62} = 145.582,12\text{€}$$

ii) Postecipadas



O esquema anterior ilustra a possibilidade de as contribuições serem postecipadas. Temos agora que

$$Q_{e+\frac{1}{m}} = Q_{e+\frac{2}{m}} = \dots = Q_{e+1}$$

$$Q_{e+1+\frac{1}{m}} = Q_{e+1+\frac{2}{m}} = \dots = Q_{e+2} = Q_{e+\frac{1}{m}} * r_g$$

e assim sucessivamente, até que se obtenha

$$Q_{j-1+\frac{1}{m}} = Q_{j-1+\frac{2}{m}} = \dots = Q_{j-\frac{1}{m}} = Q_{j-1} * r_g^{j-e-1}$$

Retendo o mesmo procedimento que o considerando para o caso das entregas antecipadas, da capitalização dos vários termos resulta que

$$\begin{aligned} F_j = & Q_e [(1+i)^{j-e-\frac{1}{m}} + \dots + (1+i)^{j-e-1}] + \\ & + Q_e [r_g (1+i)^{j-e-1-\frac{1}{m}} + \dots + r_g (1+i)^{j-e-2}] + \dots \\ & \dots + Q_e [r_g^{j-e-1} (1+i)^{\frac{m-1}{1}} + \dots + r_g^{j-e-1} (1+i)^{\frac{1}{m}}] \end{aligned}$$

A partir desta expressão, obtém-se que

### **Equação 18**

$$F_j = m * Q_e^m * \frac{i}{i^m} * \frac{(1+i)^{j-e} - (1+s)^{j-e}}{i-s} - Q_{j-1}^m$$

com  $Q_{j-1}^m = Q_e^m * (1+s)^{j-e-1}$ , assumindo as restantes variáveis o mesmo significado que no caso anterior.

Exemplo:

Quanto deverá receber um indivíduo quando atingir a idade de 60 anos, que, desde os 50 anos, efectua entregas mensais postecipadas para um plano de contribuições definidas e sabendo que esse investimento tem as seguintes características:

- As entregas no 1º ano perfizeram a quantia de 600€;
- Essas entregas crescem, em cada ano, à taxa média prevista para a inflação, ou seja, 3,2%;
- A rendibilidade efectiva anual associada ao investimento é de 5,4%?

A resolução do problema decorre da aplicação de [18], pelo que principiamos por calcular os

parâmetros envolvidos na expressão.  $\frac{Q_{e+\frac{1}{m}}}{12} = \frac{600\text{€}}{12} = 50\text{€}.$

Por sua vez,  $i^{(12)} = 12 * [(1 + 5,4\%)^{\frac{1}{12}} - 1] = 12 * 0,439\% = 5,268\%$  que é a taxa nominal anual com capitalização mensal que proporcionam uma rendibilidade efectiva anual de 5,4%.

Calculamos, ainda,  $Q_{60-1}^{(12)} = Q_{50}^{(12)} * (1 + 3,2\%)^{60-50-1} = 50\text{€} * 1,32775 = 66,39\text{€}.$

Substituindo em [18], vem

$$F_{60} = 12 * 50\text{€} * \frac{5,4\%}{5,268\%} * \frac{(1 + 5,4\%)^{60-50} - (1 + 3,2\%)^{60-50}}{5,4\% - 3,2\%} - 66,39\text{€}$$

$$F_{60} = 600\text{€} * 1,0250569 * 14,626425 - 66,39\text{€}$$

$$F_{60} = 8.929,36\text{€}$$

#### 4. PLANOS DE PENSÕES DE BENEFÍCIO DEFINIDO

No momento de construir um plano de pensões de benefício definido a favor de um determinado número de indivíduos, o actuário responsável ou o gestor do plano deve estimar o custo anual associado a esse plano, o qual, uma vez comparado com o nível de responsabilidades futuras, permite concluir acerca da sua viabilidade financeira. De outro modo, deve atender ao plano técnico-actuarial, na acepção que lhe é conferida pelo artigo 75º, número 1, do Decreto-Lei n.º 12/2006, 20 de Janeiro: “No caso de planos de pensões de

benefício definido ou mistos deve ser elaborado um plano técnico-actuarial que sirva de base para o cálculo das contribuições a fazer pelos associados e pelos contribuintes, tendo em atenção os benefícios a financiar e os participantes e beneficiários abrangidos...”.

Tal tarefa exige, porém, a identificação prévia e a quantificação das variáveis susceptíveis de influenciar a valorização do plano de pensões, bem como a eventual assunção de hipóteses relativas ao andamento de certos parâmetros.

#### 4.1. BASE TÉCNICA

A base técnica de um plano de pensões de benefício definido ou misto deve ser estabelecida no momento de constituição desse plano e assenta na discriminação de todas as variáveis e parâmetros passíveis de condicionar a sua valorização. Se a sustentabilidade de um plano de pensões depende, em grande medida, da definição de uma base técnica adequada, certo é também, que essa base técnica decorre, outrossim, das responsabilidades futuras e do tipo de prestações previstas no respectivo contrato constitutivo<sup>37</sup>.

De um modo genérico, a base técnica deve compreender as seguintes vertentes:

- Informação geral sobre o modo de determinação dos benefícios futuros, bem como das respectivas quantias de referência, nomeadamente os salários futuros e o número de anos de capitalização;
- Elaboração das tábuas demográficas susceptíveis de influenciar o número de indivíduos envolvidos no plano;
- Definição da taxa de juro futura (ou taxa de juro técnica) utilizada na valorização dos activos que compõem o fundo respectivo;
- Estabelecimento das fórmulas de determinação do custo normal do plano, das provisões e dos eventuais desvios;

---

<sup>37</sup> O **contrato constitutivo** é celebrado entre a entidade gestora e os associados fundadores e menciona todos os elementos relevantes para a definição do plano, bem como as condições gerais de funcionamento do fundo. O **contrato de gestão** é celebrado entre a entidade gestora e os associados e deve incluir os elementos relativos à política de gestão do fundo correspondente, tanto em termos actuariais como no que concerne às aplicações financeiras em geral.

- Indicação do destino dos excedentes oriundos dos desvios positivos e do modo de financiamento dos desvios negativos.

## 5.2. ESTABELECIMENTO DE HIPÓTESE

A elaboração da base técnica pressupõe, assim, o estabelecimento de hipóteses concernentes às variáveis e parâmetros presentes no plano de pensões. Entre elas ponderam factores de natureza demográfica, económica e financeira, os quais passamos a descrever de modo mais circunstanciado.

### 5.2.1. CONDICIONANTES DEMOGRÁFICAS

No momento de constituir um plano de pensões, o respectivo actuário ou responsável financeiro deve identificar quais os condicionalismos de natureza demográfica susceptíveis de influenciar o número e a composição do conjunto de participantes nesse plano, tanto ao nível dos membros activos como dos que irão auferir uma pensão de reforma.

Desde logo, em presença das eventualidades cobertas, devem ser equacionadas as diversas **possíveis causas de saída** do plano:

- A reforma propriamente dita;
- O desemprego;
- A mudança de emprego, entre outras.

Cada uma destas causas de saída traduz-se numericamente através de uma taxa – a *taxa de saída* -, a qual permite posteriormente, construir as denominadas **funções biométricas** que trataremos adiante.

Consideremos quatro possíveis causas de saída. Um dos factores que afectará, certamente, o número de participantes num plano de pensões é a **mortalidade** observada entre os trabalhadores que se encontram no activo.



Assim sendo, notaremos por  $q_x^d$  a probabilidade de um indivíduo com a idade  $x$ , no caso participante no fundo de pensões, vir a falecer antes de atingir a idade  $x+1$ ;  $p_x^d$  representa a probabilidade de o participante alcançar com vida a idade de  $x+1$ .

Este parâmetro depende, entre outras, das condições laborais que os participantes enfrentam, variando de sector para sector de actividade, no caso dos planos de empresa, sendo prudente o recurso a informação específica para cada situação em concreto. Sucede, porém, que tal informação nem sempre se encontra disponível ou tratada, pelo que, na sua maioria, os actuários sustentam o seu trabalho em tábuas de mortalidade de carácter genérico.

Outra das causas de saída é a que decorre da possível **invalidez** do participante antes de ter atingido a idade de reforma. Identificamos por  $q_x^i$  a probabilidade de o participante ficar inválido entre as idades  $x$  e  $x+1$ . Mais uma vez, trata-se de um indicador fortemente dependente dos riscos inerentes à profissão exercida e que coloca sérios constrangimentos ao seu adequado conhecimento.

A **cessação** de funções, de modo voluntário ou involuntário, corresponde a outro dos eventuais motivos de saída do colectivo de participantes. A probabilidade daí decorrente nota-se por  $q_x^c$ , procurando, justamente, quantificar a possibilidade de um indivíduo com a idade  $x$  vir a sair desse colectivo antes de completar  $x+1$  anos, por razões de índole profissional, isto é, mudança de emprego, despedimento, ou outras. Por norma, os planos consagram, porém, certos direitos aos trabalhadores, ainda que se afastem da empresa, no sentido em que, uma vez atingida a idade de reforma, irão receber em função do período de tempo em que participaram no plano.

Também  $q_x^c$  é de difícil determinação, pelo que nos limitamos a identificar algumas das causas que lhe estão subjacentes. A cessação de funções será tanto maior quanto mais incentivada for a mobilidade profissional e melhores forem as perspectivas de emprego, no seio do sector de actividade respectivo e da economia em geral. O clima económico pode, inclusivamente, provocar efeitos de sinal contrário ao nível da probabilidade de cessação de funções. É expectável que a rotação profissional reduza em períodos de crise económica. No entanto, se dessa crise resultar um incremento de despedimentos, tal redundará, a contrário, no aumento do número de saídas do colectivo.

Ainda no que concerne à idade dos participantes, é lícito esperar que o avanço da idade dos participantes limite a probabilidade de cessação de funções.

Por fim, a hipótese de **antecipação do acesso à pensão**, antes da idade legal estabelecida, será outra das possíveis causas de saída do colectivo, caso essa probabilidade se encontre expressamente prevista no plano. A probabilidade de um trabalhador com a idade  $x$  se reformar antes de completar a idade  $x+1$  representa-se por  $q_x^j$ . Este parâmetro será, necessariamente, nulo, caso o plano estabeleça uma idade obrigatória para o acesso aos beneficiários dele decorrentes.

Tal como referimos para o caso da mortalidade, também as restantes causas de saída descritas têm associadas probabilidades de permanência no colectivo de participantes, designadas, respectivamente, por  $p_x^i$ ,  $p_x^c$  e  $p_x^j$ , sendo, em conjunto com  $q_x^i$ ,  $q_x^c$  e  $q_x^j$ , necessariamente alíquotas da unidade.

Compete ao actuário responsável pelo fundo a que o plano de pensões se encontra associado identificar quais são as causas de saída relevantes em cada caso. Esse reconhecimento permite construir as denominadas **tábuas de serviço**, resultantes da conjugação das tábuas associadas às diversas causas de saída e que constituem um instrumento fundamental na determinação, em cada momento, do número de participantes no plano.

Note-se que as diversas causas de saída afectam de modo dissemelhante os participantes activos – os que exercem funções laborais – e os participantes passivos – os que exercem funções laborais – e os participantes passivos – os que se encontram a receber uma pensão de reforma, sendo a mortalidade a única causa de saída possível para estes últimos.

Por outro lado, o efeito gerado pelas diversas causas de saída ao nível dos custos do plano encontra-se condicionado pelo tipo de coberturas nele previstas.

Por exemplo, um acréscimo da mortalidade entre os participantes activos pode desencadear um efeito ambíguo, uma vez que será menor o número de participantes a atingir a idade de reforma, mas poderão, eventualmente, ser atribuídos outros benefícios aos seus descendentes. O mesmo tipo de raciocínio pode ser conduzido para o caso das saídas motivadas por invalidez.

As probabilidades associadas às diversas causas de saída permitem construir a denominada **função de sobrevivência composta** (composite survival function) que identificaremos por  $p_e^{(T)}$

e que corresponde à probabilidade de um indivíduo com idade  $x$ , uma vez sujeito às diversas causas de saída, se manter participante activo do plano ao atingir a idade  $x+1$ . Assim sendo,

#### **Equação 19**

$$p_x^{(T)} = (1 - q_x^d)(1 - q_x^i)(1 - q_x^c)(1 - q_x^j)$$

Ou, de outro modo,

#### **Equação 20**

$$p_x^{(T)} = p_x^d * p_x^i * p_x^c * p_x^j$$

Podemos, ainda, calcular a probabilidade de um participante activo de  $x$  anos se manter ao serviço passados  $n$  anos, logo

#### **Equação 21**

$$p_x^{(T)} = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}^{(T)}$$

Se designarmos por  $l_x^{(T)}$  o número de participantes activos no plano de idade  $x$  e atendendo ao significado de  $p_x^{(T)}$ , calcula-se, ainda o número de participantes activos que abandonam o serviço antes de completarem  $x+1$  anos, logo

#### **Equação 22**

$$d_x^{(T)} = l_x^{(T)} * q_x^{(T)}$$

**Probabilidade independente** – taxa de decréscimo do número de participantes num fundo associada a uma certa causa de saída.

**Probabilidade dependente** – probabilidade de decréscimo do número de participantes no fundo relativa a essa causa de saída.

O conceito de probabilidade independente decorre da consideração isolada dos efeitos de cada uma das causas de saída *per se*; enquanto isso, a formalização da probabilidade dependente assenta na impossibilidade de algumas causas de mesmo tempo o colectivo de participantes, no fundo.

Considerando, em termos genéricos,  $k$  causas de saída, designaremos por  $(q_x^k)$  a **probabilidade dependente** associada a cada uma delas. Recorde-se que notámos por  $q_x^k$  a **probabilidade independente** associada a cada uma das causas de saída aqui contempladas, a saber, morte, invalidez, cessação e jubilação. As probabilidades dependentes podem ser obtidas tendo por base as probabilidades independentes que constam das tábuas respectivas, sendo, porém, de menor expressão.

Acresce, ainda, referir que, num colectivo sujeito a apenas uma causa de saída, probabilidade independente e probabilidade dependente coincidirão. É, aliás, o que sucede nos colectivos de pensionistas para os quais a única causa de saída possível é o falecimento.

Assim, considerando **duas causas de saída**, a probabilidade dependente de cada uma delas pode ser obtida através da expressão seguinte, sendo  $q_x^2$  a probabilidade independente da outra causa. Vem que

#### Equação 23

$$(q_x^1) = q_x^1 [1 - \frac{1}{2} q_x^2]$$

Para **três causas de saída**, vem que

#### Equação 24

$$(q_x^1) = [1 - \frac{1}{2} (q_x^2 + q_x^3) + \frac{1}{3} q_x^2 q_x^3]$$

Por sua vez, para **quatro causas de saída**, virá

#### Equação 25

$$(q_x^1) = [1 - \frac{1}{2} (q_x^2 + q_x^3 + q_x^4) + \frac{1}{3} (q_x^2 q_x^3 + q_x^2 q_x^4 + q_x^3 q_x^4) - \frac{1}{4} (q_x^2 q_x^3 q_x^4)]$$

Concomitantemente, podemos expressar cada uma das probabilidades independentes em função das respectivas probabilidades dependentes. Demonstra-se para cada causa de saída  $k$ , que

**Equação 26**

$$q_x^j = \frac{(q_x^k)}{1 - \frac{1}{2}[(q_x^T) - (q_x^k)]}$$

E ainda que

**Equação 27**

$$q_x^k = 1 - [1 - (q_x^T)]^{\frac{(q_x^k)}{(q_x^T)}}$$

**Tabela 9 - Tábuas de mortalidade/participantes**

TV 73/77	35%
TV 88/90	32,30%
TV 73/77 (MOD.) e TV 88/90	5,70%
TV 73/77 / TV 88/90	5%
Outras	22%
TOTAL	100%

Fonte: Autoridade de Supervisão de Seguros e de Fundos de Pensões (2009)

**Tabela 10 - Tábuas de mortalidade/beneficiários**

TV 73/77	38,30%
TV 88/90	32,30%
TV 73/77 (MOD.) e TV 88/90	5,70%
TV 73/77 / TV 88/90	5,30%
Outras	18,30%
TOTAL	100,00%

Fonte: Autoridade de Supervisão de Seguros e de Fundos de Pensões (2009)

As percentagens que se apresentam foram calculadas tendo por base o número de planos efectivos, sem atender ao número de participantes ou ao peso relativo dos investimentos associados.

Os planos que se sustentam, em simultâneo, na TV 73/77 e na TV 88/90, aplicam, por norma, a primeira à população masculina e a segunda à população feminina. As “outras” tábuas

referidas nas tabelas são, geralmente, **tábuas dinâmicas**, as quais são sucessivamente corrigidas através de modelos matemáticos, de modo a contemplar e prever atempadamente os efeitos decorrentes do acréscimo de longevidade.

### 5.2.2. CONDICIONANTES ECONÓMICAS

Entre as condicionantes económicas assumem particular relevo os **aspectos de índole salarial**, na medida em que o montante da pensão a receber no futuro é, por norma, no caso dos planos de benefício definido, determinado em função do nível de salários auferidos por cada um dos participantes no plano. O montante das pensões a pagar condiciona, por sua vez, de modo decisivo, as responsabilidades futuras do plano e, necessariamente, o seu equilíbrio financeiro-actuarial, pelo que se revela de primordial importância a adequada estimativa desse nível salarial.

Desde logo, devemos identificar quais são os factores susceptíveis de influenciar as remunerações futuras. De modo genérico, apontamos:

- i) A produtividade, que em termos globais, se correlaciona positivamente com o nível salarial;
- ii) A taxa de inflação, no sentido em o nível de salários tende a acompanhar o nível geral de preços;
- iii) A antiguidade na função, uma vez que em determinadas profissões existem subidas de escalão de carácter automático, isto é, independentes da prestação profissional do participante;
- iv) O mérito e a competência profissional do participante, os quais lhe poderão valer progressões na carreira e, conseqüentemente, acréscimos no vencimento auferido.

Uma vez na posse dos elementos acima referidos, compete ao actuário responsável o estabelecimento de uma **escala salarial**, que permitirá projectar o nível de salário a auferir no futuro por cada participante.

Temos escala salarial simples e escala salarial complexa.

Numa **escala salarial simples**, a idade do participante não é considerada relevante para efeitos de projecção do salário futuro, ao mesmo tempo que a taxa de crescimento do nível salarial é tida como constante para todo o período considerado.

Temos a seguinte simbologia:

- $S_e$  representa o salário anual auferido pelo participante no momento da sua entrada no plano de pensões;
- $S_x$  corresponde ao salário anual calculado para cada participante quando este atinge a idade  $x$ , sendo que  $e \leq x \leq j-1$ ;
- $S_{j-1}$  identifica o salário anual auferido pelo participante no período de tempo imediatamente anterior ao da entrada na reforma;
- $s_t$  indica a taxa de crescimento salarial considerada para cada período de tempo  $t$ .

Assim sendo, podemos estabelecer, para o caso genérico, que

#### **Equação 28**

$$S_x = S_e \prod_{t=e}^{x-1} (1 + s_t)$$

No entanto, como numa escala salarial simples  $s_t$  é constante, substitui-se por  $\bar{s}$ , sendo ainda que a expressão anterior dará lugar à seguinte:

#### **Equação 29**

$$S_x = S_e (1 + \bar{s})^{x-e}$$

Notando, agora, por  $W_x$  o montante de salário acumulado pelo participante no momento correspondente a cada idade  $x$ , ou seja, o montante total de salários recebidos até essa data, vem que

#### **Equação 30**

$$W_x = \sum_{t=e}^{x-1} S_t$$

Enquanto isso, para o momento  $j$ , virá que

### Equação 31

$$W_j = \sum_{t=e}^{j-1} S_t$$

$W_j$  representa, então, o nível total de rendimentos auferidos ao longo da vida activa do participante.

Por sua vez, recorremos a uma escala **salarial complexa**, pressupomos que ritmo crescimento do salário difere em função da idade do participante no plano de pensões. Compete, então, ao actuário responsável pelo respectivo fundo definir quais são os coeficientes de correcção salarial que traduzem as vicissitudes desta natureza.

O nível de salário projectado para uma certa idade  $x$  é dado por

### Equação 32

$$S_x = S_e \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_e} \prod_{t=e}^{x-1} (1 + f_t + g_t)$$

em cuja expressão os símbolos assumem os significados seguintes:

- $\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_e}$  é a ratio entre os coeficientes salariais relativos a uma idade  $x$  e à idade de entrada no plano, equivalendo ao crescimento salarial decorrente da antiguidade na empresa e do mérito do participante<sup>38</sup>;
- $f_t$  identifica a taxa de inflação observada em cada período  $t$ , o que indica o crescimento nominal dos salários;
- $g_t$  denota a taxa de produtividade relativa a cada período  $t$ , traduzindo, assim, o acréscimo dos salários em termo reais.

Se retivermos a possibilidade de  $f_t$  e  $g_t$  se manterem constantes ao longo de todo o período em apreço, o salário referente à idade alcançada  $x$  obtém-se por intermédio de

---

<sup>38</sup> Por norma, considera-se que o coeficiente salarial relativo à data de entrada no plano corresponde à unidade ou a um índice igual a 100.



**Equação 33**

$$S_x = S_e \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_e} (1 + \bar{f} + \bar{g})^{x-e}$$

Para além disso, o nível de salário projectado para a idade de reforma é dado por

**Equação 34**

$$S_j = S_e \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_e} \prod_{t=e}^{j-1} (1 + f_t + g_t)$$

Se considerarmos, neste caso,  $f_t$  e  $g_t$  variáveis.

O impacto dos coeficientes salariais ao nível do custo de um plano de pensões depende da composição e da estrutura da população laboral por idades, uma vez que os trabalhadores mais jovens auferem, por norma, rendimentos mais baixos, enquanto os trabalhadores mais idosos auferem rendimentos mais elevados. No entanto, se ao longo do tempo, os trabalhadores se distribuírem de um modo estável pelos diferentes níveis etários, este factor não terá um efeito significativo sobre o custo associado aos planos de pensões. Na verdade, se os trabalhadores que atingem a idade de reforma forem sucessivamente substituídos por trabalhadores jovens, a estrutura da população de efectivos manter-se-á estável, dada a própria natureza dinâmica do envelhecimento.

Porém, o entendimento no que tange ao modo como os efeitos salariais operam e se relacionam com a idade dos participantes não é consensual. Alguns autores<sup>39</sup> sustentam que o acréscimo salarial resultante do mérito é mais evidente nas idades jovens, reduzindo à medida que a idade dos indivíduos avança.

Apresenta-se, de seguida, uma tabela onde tal acontece, ou seja, na qual os coeficientes crescem, mas a uma taxa decrescente.

---

<sup>39</sup> Cfr., por todos, H. E. Winklewoss, Pension Mathematics with Numerical Illustrations.

**Tabela 11 - Escala salarial em função do mérito**

x	Coeficiente Salarial	x	Coeficiente Salarial	x	Coeficiente Salarial
20	1,000	35	1,749	50	2,460
21	1,045	36	1,802	51	2,497
22	1,091	37	1,854	52	2,532
23	1,138	38	1,906	53	2,565
24	1,186	39	1,958	54	2,596
25	1,234	40	2,008	55	2,624
26	1,284	41	2,059	56	2,651
27	1,334	42	2,108	57	2,674
28	1,384	43	2,157	58	2,696
29	1,436	44	2,204	59	2,715
30	1,487	45	2,250	60	2,731
31	1,539	46	2,295	61	2,745
32	1,592	47	2,339	62	2,756
33	1,644	48	2,381	63	2,764
34	1,697	49	2,422	64	2,769

Fonte: H. E. Winklewoss, Pension Mathematics with Numerical Illustrations

Em contraponto, acresce referir que em algumas profissões existem escalas de progressão salarial bem definidas (por exemplo, níveis, escalões ou categorias), sendo essa progressão mais acentuada no final da carreira.

Entre os factores apontados susceptíveis de afectar o montante futuro dos salários. A taxa de inflação é o que assume maior peso explicativo, tanto mais que incide, de igual modo, sobre os vários sectores de actividade e sobre todos os participantes, independentemente da idade alcançada e do mérito respectivo.

A taxa de inflação não tem tido, porém, uma expressão constante ao longo do tempo, o que coloca dificuldades no cálculo do valor dos benefícios futuros, principalmente se atendermos a que no caso dos planos de pensões pode estar envolvido um número de anos muito significativo. Em termos práticos, tais obstáculos contornam-se através da observação de séries cronológicas e do posterior estabelecimento de uma taxa constante, capaz de incorporar, em termos médios, a tendência de longo prazo patente nas séries analisadas.

Em 2008, perto de metade dos fundos de pensões nacionais recorreram a taxas de crescimento salarial que oscilaram entre os 2,5% e os 3%; enquanto isso, cerca de 15% dos fundos aplicaram taxas que se situam entre os 3% e os 3,5%<sup>40</sup>.

No que tange aos efeitos resultantes dos ganhos de produtividade, estes não se repartem de modo homogéneo ao nível dos vários sectores de actividade. Para além disso, à semelhança do que sucede para a taxa de inflação, a produtividade tem assumido, em termos históricos, um peso diverso, alterando períodos de forte crescimento económico com outros de relativo abrandamento.

#### 4.2.3. CONDICIONANTES FINANCEIRAS

Entre as condicionantes financeiras associadas a um plano de pensões, assume particular relevo a **taxa de juro técnica**, ou, muito simplesmente, taxa técnica<sup>41</sup>.

A **taxa técnica** pode ser definida como a rendibilidade média anual que se espera vir a obter com o investimento das quantias associadas ao respectivo fundo de pensões.

A taxa técnica é de importância fulcral no âmbito da valorização do plano de pensões e, bem assim, na determinação do respectivo custo. Nestes termos, a consideração de uma taxa técnica muito elevada pressupõe a observação de uma forte rendibilidade; consequentemente, serão requeridos baixos níveis de contribuições. Ao invés, a consideração de uma taxa técnica mais baixa aumenta o custo de cada participante e logo o montante de contribuições a verter para o respectivo fundo.

Se a rendibilidade efectiva do fundo se fixar abaixo da taxa técnica, tal impõe sérios constrangimentos à sustentabilidade financeira do plano, bem como ao seu promotor.

O estabelecimento da taxa técnica decorre do somatório de três parcelas independentes, a saber:

---

<sup>40</sup> Cfr. Autoridade de supervisão de seguros e de fundos de pensões (2009), Relatório do Sector Segurador e Fundos de Pensões - 2008

<sup>41</sup> Pode, ainda, ser denominada por **taxa de desconto**, uma vez que se destina a actualizar o valor das pensões previstas.

- a **taxa de juro sem risco**, que se define como a taxa de juro subjacente a uma operação financeira, onde não ponderam factores exógenos. De outro modo, esta taxa designa-se também por *taxa pura* e apenas reflecte o prémio de diferimento no uso do capital.
- O **prémio de risco**, destinado a compensar o risco intrínseco a qualquer operação financeira. Este prémio de risco é susceptível de mensuração, tendo por base a observação de séries cronológicas referentes à taxa de juro;
- O **índice geral de preços**, através do qual se repercutem as alterações do valor nominal dos capitais.

Tomamos, mais uma vez, os elementos contidos no Relatório do Sector Segurador e Fundos de Pensões – 2008, os quais permitiram construir a seguinte tabela:

**Tabela 12 - Taxas de desconto utilizadas pelos fundos nacionais - 2008**

Período de tempo	Intervalo de variação	Percentagem do número de fundos
Período activo	Entre 5% e 5,5%	29%
	Entre mais de 5,5%	35%
período de reforma	Entre 5% e 5,5%	24%
	Mais de 5,5%	31%

Fonte: Autoridade de supervisão de seguros e de fundos de pensões (2009)

O recurso a diferentes taxas de desconto prende-se, sobretudo, com o tipo de coberturas previstas nos planos e com a maturidade das responsabilidades envolvidas.

#### **4.3. PRESTAÇÕES PREVISTAS**

Em muitos planos de pensões, prevê-se a existência de outro tipo de benefícios para além da atribuição de uma de reforma<sup>42</sup>.

<sup>42</sup> Tal sucede, principalmente, nos casos em que os planos de pensões privados funcionam como uma exclusiva ao sistema público, integrando, por isso, o mesmo tipo de prestações que as contempladas neste último.

Esses benefícios designam-se por **prestações complementares** e incluem as prestações de invalidez, as prestações de sobrevivência (viuvez e orfandade) e as prestações de rotação.

No âmbito do presente texto, sobretudo por razões de simplificação, tomarei a pensão de reforma como única prestação contemplada nos planos de benefício definido.

A prestação cumulativa anual é a quantia que o plano reconhece a favor do beneficiário, em termos de direito à pensão, por cada ano de trabalho decorrido, e que noto por  $b_x$ .

Por sua vez, a prestação acumulada ( $B_x$ ) define-se em função de  $b_x$  e traduz o montante de pensão que se encontra garantido para cada momento. Logo, poderei estabelecer que

#### **Equação 35**

$$B_x = \sum_{t=e}^{x-1} b_t$$

A prestação acumulada designa-se, também, por **prestação alcançada à idade x** e traduz o modo como, ao longo do tempo, se vai formando o direito à pensão de reforma. Quer isto dizer que, por cada ano de trabalho do participante, se constitui um direito correspondente a  $b_x$ .

$B_x$  é, assim, crescente, podendo esse crescimento produzir-se i) de modo constante ou ii) de modo crescente.

- i) Sendo constante, teremos que  $b_x = \bar{b}$ , donde, para qualquer idade alcançada x, vem que

#### **Equação 36**

$$B_x = \bar{b}(x - e)$$

Por seu turno, a prestação alcançada à idade de reforma obtém-se através de

#### **Equação 37**

$$B_j = \bar{b}(j - e)$$

Tomando as expressões anteriores, de modo imediato, estabelece-se, respectivamente, que

**Equação 38**

$$\bar{b} = \frac{B_x}{x-e}$$

Ou ainda que

**Equação 39**

$$\bar{b} = \frac{B_j}{j-e}$$

Aas expressões formalizadas através [34a] e de [34b] têm o mesmo significado, uma vez que a parcela de direito constituído em cada ano resulta da razão existente entre a prestação acumulada a uma certa idade e o número de anos decorridos desde a entrada no plano.

Igualando ambas as razões, poderemos formalizar a prestação alcançada a uma certa idade x em função da prestação alcançada à idade de reforma e vice-versa, donde resulta que

**Equação 40**

$$B_x = \frac{x-e}{j-e} * B_j$$

Concomitantemente,

**Equação 41**

$$B_j = \frac{j-e}{x-e} * B_x$$

Atenda-se a que, nesta possibilidade, a prestação cumulativa anual funciona como uma variável independente, pois sendo constante não resulta de qualquer nível de salário auferido pelo participante.

ii) Sendo crescente, vem que

**Equação 42**

$$b_x = k * S_x$$

com  $k$  a corresponder à percentagem do salário traduzida em termos de direito formado no respectivo período de tempo, o que equivale a dizer que  $b_x$  traduz o montante da prestação cumulativa.

Destarte, como  $B_x = \sum_{t=e}^{x-1} b_t$ , podemos também estabelecer a expressão

#### **Equação 43**

$$B_x = \sum_{t=e}^{x-1} k * S_t = k \sum_{t=e}^{x-1} S_t$$

a qual permite, por seu turno, conhecer o valor da prestação acumulada.

No entanto, a questão fulcral que se coloca é a de saber qual o salário de referência que deve ser considerado para efeitos de determinação de  $b_x$ . As situações mais comuns são aquelas em que o salário de referência equivale ao rendimento médio de um certo número de anos, por norma a média dos salários recebidos nos últimos anos de trabalho, ou, então, à média dos salários recebidos ao longo de toda a vida activa.

Se o salário de referência se obtiver através da **média dos salários projectados para os últimos  $n$  anos de serviço** do participante, virá que

#### **Equação 44**

$${}_n S_t = \frac{1}{n} (S_{j-n} + S_{j-n+1} + \dots + S_{j-1})$$

Como o montante do benefício a receber a título de pensão de reforma se define atendendo ao valor médio dos salários projectados para os últimos  $n$  anos de vida activa do participante no plano, decorre que

#### **Equação 45**

$$B_j = k * (j - e) * {}_n S_j$$

Atendendo, ainda, ao significado e à composição de  ${}_n S_j$ , virá que

#### Equação 46

$$B_j = k * (j - e) * \frac{W_j - W_{j-n}}{n}$$

Por sua vez, se a base de referência se alargar a **toda a vida activa** do participante, surge que

#### Equação 47

$$j - e S_j = \frac{1}{j - e} (S_e + S_{e+1} + \dots + S_{j-1})$$

De outro modo,

#### Equação 48

$$B_x = k * W_x$$

uma vez que o montante da prestação alcançada à idade x resulta, assim, da aplicação da percentagem k ao salário acumulado nessa mesma idade. Raciocínio idêntico pode ser conduzido para a idade j, donde

#### Equação 49

$$B_j = k * W_j$$

De assinalar que cada um dos  $S_t$  contemplados nas expressões anteriores pode ser obtido por intermédio de [25] ou de [29], consoante se esteja em presença, respectivamente, de uma escala salarial simples ou de uma escala salarial complexa.

### 4.4. CUSTOS ASSOCIADOS AOS PLANOS DE BENEFÍCIO DEFINIDO

#### 4.4.1 CUSTO NORMAL

O **custo normal** corresponde ao montante de financiamento requerido pelo plano, por cada participante, no início de cada período de valorização.

Designamos por  $NC_x$ , o custo normal por participante de idade alcançada x (normal cost). Por sua vez, a sigla  $A_t$  refere-se ao número total de participantes no plano em cada período t, pelo que, se identificamos por  $NC_t$  o custo normal total decorrente do plano para cada período t, poderemos estabelecer que



#### Equação 50

$$NC_t = \sum_{A_t} NC_x$$

O custo normal varia consoante o método de valorização utilizado. Porém, **o custo normal é, por regra, maior para os participantes de idades mais avançadas e menor para os participantes de idades mais jovens**. Tal resulta da conjugação do efeito financeiro e do efeito demográfico, ambos contemplados na determinação do custo normal através de  $j - x E_x^{(T)}$ .

O cálculo do custo normal revela-se de extrema importância no presente contexto, pois corresponde à quantia que o promotor do plano deve investir, em cada ano, no fundo respectivo, no pressuposto de que se mantêm válidas as hipóteses de partida, isto independentemente do método de valorização considerado. Assim, **o custo normal traduz o nível adequado de financiamento por participante**, em cada período t.

O conceito de custo normal permite, ainda, estabelecer o de provisão matemática constituída, que desenvolverei adiante.

#### 4.4.2 CUSTO SUPLEMENTAR

As hipóteses subjacentes ao estabelecimento da base técnica do plano nem sempre se verificam, sendo antes susceptíveis à ocorrência de desvios. Consequentemente, para além do conceito de custo normal, devemos atender ao conceito de custo suplementar, que se define como a quantia que o promotor do plano deve investir no respectivo fundo, no início de cada ano, no intuito de amortizar as denominadas provisões matemáticas não constituídas. Estas provisões, para além do afastamento das hipóteses consideradas no momento da constituição do plano, resultam, ainda, do eventual reconhecimento de serviços prestados pelos participantes, prévios à data de entrada no plano.

Se designarmos por  $SC_x$  o custo suplementar associado a um participante de idade alcançada x (supplementary cost), obteremos o custo suplementar global, referente a um certo momento t, através da expressão

#### Equação 51

$$SC_t = \sum_{A_t} SC_x$$

#### 4.4.3 CUSTO ANUAL

Por último, consideramos o custo anual para cada participante de idade alcançada  $x$  ( $C_x$ ), o qual resulta da soma do custo normal e do custo suplementar, logo

#### Equação 52

$$C_x = NC_x + SC_x$$

Necessariamente, o custo anual total decorrente do plano de pensões, para um dado período  $t$ , resulta do somatório do custo anual de todos os participantes, donde

#### Equação 53

$$C_t = NC_t + SC_t = \sum_{A_t} C_x$$

#### 4.5 PROVISÕES MATEMÁTICAS

A **provisão matemática** corresponde ao montante que, para cada momento  $t$ , deverá estar disponível no fundo, de modo a que possam ser garantidos os compromissos estabelecidos a favor dos participantes/beneficiários do plano. De outro modo, a provisão matemática corresponde ao **valor actuarial das responsabilidades futuras** associadas ao plano.

A provisão total constituída para cada período (que designamos por  $AL_t$ ) resulta do somatório das provisões atinentes a cada um dos participantes de idade alcançada  $x$  ( $AL_x$ ), logo

#### Equação 54

$$AL_t = \sum_{A_t} AL_x$$

A provisão matemática pode ser obtida através do método prospectivo ou através do método retrospectivo. De acordo com o **método prospectivo**, a provisão matemática associada a cada

participante de idade  $x$  pode ser obtida através da diferença entre o valor actual dos benefícios futuros – que identificamos por  $VABF_x$  – e o valor dos custos normais futuros ainda não realizados, ou seja, das contribuições a efectivar entre o momento  $x$  e o momento  $j$  – que notamos por  $VANCF_x$ . Estabelecemos, assim, que

#### Equação 55

$$AL_x = VABF_x - VANCF_x$$

Tomando o total de participantes, vem que

#### Equação 56

$$AL_t = \sum_{A_t} VABF_x - \sum_{A_t} VANCF_x$$

Já se atendermos ao **método retrospectivo**, a provisão matemática corresponde ao valor acumulado dos custos normais associados às prestações desde o momento da entrada no plano € até ao momento da valorização ( $x$ ), logo

#### Equação 57

$$AL_x = \sum_{t=e}^{x-1} NC_t * \frac{1}{x-t} E_t^{(T)}$$

O cálculo da provisão matemática é de extrema importância no contexto da valorização dinâmica do plano de pensões. Assim, em cada momento  $t$ , a provisão matemática constituída deve ser comparada com a quantia acumulada no fundo de pensões respectivo, tendo em vista a aferição da sua sustentabilidade financeira. Essa comparação conduz-nos ao conceito de **provisão matemática não constituída** ( $UAL_t$ ), sendo que

#### Equação 58

$$UAL_t = AL_t - F_t$$

De facto, correspondendo a provisão matemática constituída ao valor actuarial das responsabilidades futuras, se  $AL_t > F_t$ , tal significa que **essas responsabilidades excedem o montante acumulado no fundo, o que consubstancia um défice de financiamento**.

O inverso é, também, verdadeiro, ou seja, se  $AL_t < F_t$  daí decorre que, nesse momento, **o montante acumulado no fundo supera o valor das responsabilidades futuras**; por sua vez, se  $AL_t = F_t$ , tal configura uma situação de equilíbrio, a qual se revela pouco plausível sob o ponto de vista prático.

#### 4.6. GANHO ACTUARIAL

O ganho actuarial corresponde à diferença entre a provisão matemática não constituída esperada, referente a um dado plano, no momento  $t+1$ , e a provisão matemática não constituída real, observada no mesmo momento.

Designando por  $G_{t+1}$  esse ganho actuarial, por  $U\tilde{A}L_{t+1}$  a provisão matemática não constituída esperada e por  $UAL_{t+1}$  a provisão matemática não constituída real, teremos que

##### Equação 59

$$G_{t+1} = U\tilde{A}L_{t+1} - UAL_{t+1}$$

O ganho actuarial entre  $t$  e  $t+1$  constitui um **bom indicador de gestão do plano**, pois permite aferir o que sucedeu entre esses dois momentos. Deste modo, o valor obtido para o ganho actuarial relativo ao período de tempo decorrente entre os momentos  $t$  e  $t+1$  sustenta e legitima a tomada de decisões para os períodos subsequentes, nomeadamente no que concerne à recolha de contribuições e à estratégia de investimento.

### 5. MÉTODOS DE VALORIZAÇÃO DE PLANOS DE PENSÕES DE BENEFÍCIO DEFINIDO

Os métodos **de valorização de planos pensões de benefício definido** são compostos por um conjunto de procedimentos matemáticos, de carácter actuarial, que visam a avaliação e a distribuição dos custos associados a esse planos, ao longo do respectivo período de funcionamento, sendo, por isso mesmo, também designados por métodos de custos.

Os métodos de custos são utilizados no âmbito dos fundos de pensões de benefício definido, particularmente dos que são constituídos por empresas e destinados à protecção da velhice dos respectivos trabalhadores, quer sejam ou não de natureza contributiva. Desde logo, um dos objectivos destes métodos é o de determinar qual o nível de contribuições a realizar, susceptível de garantir o pagamento dos benefícios previamente definidos. São, assim, métodos de custeio dos benefícios futuros.

No presente contexto, tendo em conta a variável de partida para efeitos de determinação do custo do plano, consideraremos dois tipos de métodos:

- Os métodos actuarias baseados nos custos **das prestações acumuladas**;
- E os métodos actuariais baseados nos **custos das prestações projectadas**.

Por tanto, apontamos algumas das notações utilizadas e recordamos o significado de outras já nossas conhecidas:

x: idade de cada participante no inicio de cada período de valorização do fundo (de t a t+1);

j: idade de reforma de cada participante no fundo (por norma, j coincide com a idade legal de acesso à reforma, o que, no caso nacional, corresponde aos 65 anos;

e: idade com que o participante entra no mercado de trabalho;

a: momento a partir do qual se começam a realizar contribuições para o fundo, podendo este equivaler ou ser posterior ao momento e;

$A_t$ : identifica o colectivo de participantes no fundo em cada período de valorização t.

Atenda-se que  $A_t$  pode ser entendido como um conjunto *aberto* ou *fechado*, consoante esteja ou não prevista a entrada de novos participantes.

Assim, se entendermos o colectivo de participantes no plano como um **conjunto aberto**, teremos que:

#### **Equação 60**

$$A_{t+1} = A_t - R - S + N$$

com R a representar o número de participantes que saem do fundo por se terem tornado pensionistas, S a corresponder ao número de participantes que saem do fundo devido a outro tipo de motivos (despedimentos, mudança de emprego, falecimento ou outras) e N a notar os novos participantes que entram no fundo.

Sendo  $A_t$  um **conjunto fechado**, virá que

### **Equação 61**

$$A_{t+1} = A_t - R - S$$

com as siglas a assumirem os mesmos significados que no caso anterior. Por sua vez,  $P_t$  indica o número de pensionistas em cada momento  $t$ . Neste caso,

### **Equação 62**

$$P_{t+1} = P_t + R - F$$

sendo  $F$  o número de pensionistas falecidos durante o período em apreço.

## **5.1. MÉTODOS ACTUARIAIS DE PRESTAÇÕES ACUMULADAS**

Entre os métodos de custos baseados nas prestações acumuladas, analisaremos

- i) O **método do crédito unitário tradicional** (normalmente conhecido por TUC<sup>43</sup>), ou ainda por método do crédito unitário não projectado;
- ii) O **método do critério unitário projectado** (designado pela sigla PUC<sup>44</sup>).

Nestes métodos, os custos atinentes ao plano de pensões resultam dos benefícios acumulados por cada período de tempo decorrido até ao momento de realização.

Os dois métodos percorrem o mesmo tipo de procedimentos, partindo ambos, para efeitos da determinação do custo normal, do montante da prestação garantida por cada ano de serviço prestado. A única diferença evidente concerne ao modo de cálculo de  $b_x$  e, consequentemente, de  $B_x$ : o primeiro método considera um nível constante de salários ao longo da vida activa do participante no plano; enquanto isso, o segundo recorre a uma escala de variação salarial para efeitos da determinação da prestação cumulativa.

### **5.1.1 MÉTODO DO CRÉDITO UNITÁRIO TRADICIONAL**

---

<sup>43</sup> Abreviatura anglo-saxónica para Tradicional Unit Credit.

<sup>44</sup> Correspondente a Projected Unit Credit.

Tratando-se de planos de benefício definido, o montante da pensão a auferir uma vez atingida a idade de reforma é estabelecido no momento de constituição do plano.

De acordo com o método do critério unitário tradicional, por cada ano de trabalho decorrido é garantida uma **certa quantia** em termos de pensão de reforma, que, tal como vimos anteriormente, se designa por prestação cumulativa. No caso em apreço,  $b_x$  assume um valor **constante**<sup>45</sup>, logo **sem depender de qualquer escala salarial**. A partir da data acordada, o trabalhador receberá o correspondente a esse montante, com periodicidade mensal ou anual, no pressuposto de que sobrevive.

Assim, o primeiro procedimento a tomar é o de definir  $b_x$ , seguindo-se o cálculo da prestação acumulada, atendendo às expressões já estabelecidas.

Uma vez conhecido o valor da prestação cumulativa, procede-se ao cômputo do custo normal associado ao plano. Convém sublinhar que o cálculo das grandezas apontadas nas secções do ponto anterior assume contornos específicos no contexto de cada um dos métodos de valorização considerados.

No presente método, o custo normal associado a cada participante obtém-se através de

### Equação 63

$$NC_x = b_x * j - x E_x^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}$$

Na expressão anterior  $j - x E_x^{(T)}$  corresponde a  $\frac{D_j^{(T)}}{D_x^{(T)}}$ , que traduz o valor actuarial de um capital unitário a pagar, no momento  $j$ , a um indivíduo de idade  $x$ , no pressuposto de que este permanece no plano de pensões, considerando todas as causas de saída possíveis. De outro modo  $j - x E_x^{(T)}$ , permite reportar, em termos actuariais, as contribuições vertidas a favor do fundo para o momento de acesso à pensão de reforma. Enquanto isso,  $\ddot{a}_j^{(m)}$  indica o valor actual de uma renda imediata, antecipada, fraccionária, de capital unitário, constituída à idade  $j$ ; este factor representa, assim, a actualização das pensões futuras para o momento da idade

---

<sup>45</sup> Para cada momento de valorização do plano, toma-se normalmente, o nível de salários do ano corrente.

de acesso à reforma. Em termos conjuntos,  ${}_j-x E_x^{(T)}$  e  $\ddot{a}_j^{(m)}$  cobrem o período de tempo que se interpõe entre o momento de realização das contribuições – e, bem assim, da avaliação do plano – e o momento de recebimento da pensão.

Tomando o conjunto de participantes no plano, definimos que

#### Equação 64

$$NC_x = \sum_{A_t} b_x * {}_j-x E_x^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}$$

Para além disso, com base em  $B_x$ , determina-se a **provisão matemática constituída**, sendo, ainda, de apurar a **provisão matemática não constituída**.

Atendendo aos significados de  $VABF_x$  e de  $VANCF_x$  e substituindo na expressão genérica formalizada em [45], vem que

$$\begin{aligned} AL_x &= B_j * {}_j-x E_x^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)} - \sum_{t=x}^{j-1} [b_t * {}_j-x E_x^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}] * {}_{t-x} E_x = \\ &= B_j * {}_j-x E_x^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)} - \left( \sum_{y=x}^{j-1} b_y \right) * {}_{t-x} E_x^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)} \end{aligned}$$

Observe-se, poré,, a que  $B_x = B_j - \sum_{t=x}^{j-1} b_t$ , no sentido em que a prestação acumulada a uma

certa idade alcançada  $x$  corresponde à prestação acumulada à idade de acesso à reforma  $j$  reduzida do somatório das prestações cumulativas anuais de cada participante, que ocorrerão entre as idades  $x$  e  $j$ . Consequentemente, a expressão anterior poderá ser amplificada, surgindo que

#### Equação 65

$$AL_x = B_x * {}_j-x E_x^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}$$

Por seu turno, esta expressão permite obter a provisão matemática para o conjunto de participantes no plano, no momento de valorização  $t$ , donde



**Equação 66**

$$AL_x = \sum_{A_t} B_x *_{j-x} E_x^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}$$

A provisão matemática não permanece, porém, constante ao longo do tempo, indo variar em função da estrutura etária do colectivo de participantes.

Considerando, de modo particular, a valorização dinâmica do plano de pensões, revela-se oportuno o cálculo da provisão matemática atinente ao final do período de valorização, isto é, ao momento  $t+1$ . Tendo [56] como referência, estabelecemos que

**Equação 67**

$$AL_{t+1} = \sum_{A_{t+1}} AL_{x+1} = \sum_{A_{t+1}} B_{x+1} *_{j-x} E_{x+1}^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}$$

Recorde-se, contudo, que, assumindo o colectivo de participantes como um conjunto fechado,  $A_{t+1} = A_t - S - R$ , pelo que a expressão anterior poderá ser desdobrada do seguinte modo:

**Equação 68**

$$AL_{t+1} = \sum_{A_t} B_{x+1} *_{j-x-1} E_{x+1}^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)} \quad [57b]$$

Sucedee, ainda, que  $_{j-x-1} E_{x+1}^{(T)} = _{j-x} E_{x+1}^{(T)} (1+i) + q_x^{(T)} *_{j-x-1} E_{x+1}^{(T)}$ , com  $q_x^{(T)}$  a identificar a probabilidade de saída do plano de um individuo de idade  $x$  antes de completar a idade  $x+1$ , considerando todas as causas de saída possíveis. Ao substituírmos na expressão anterior, vem que

$$AL_{t+1} = \sum_{A_t} B_{x+1} *_{j-x} [ _{j-x} E_x^{(T)} (1+i) + q_x^{(T)} *_{j-x-1} E_{x+1}^{(T)} ] * \ddot{a}_j^{(m)}$$

**Equação 69**

$$- \sum_{S+R} B_{x+1} *_{j-x-1} E_{x+1}^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}$$

Por último, a provisão matemática relativa ao momento t+1 pode ser igualmente definida como

$$AL_{t+1} = [AL_t + NC_t](1+i) + \sum_{A_t} B_{x+1} * \frac{E_{x+1}^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}}{j-x-1} -$$

#### Equação 70

$$-[\sum_S B_{x+1} * \frac{E_{x+1}^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}}{j-x-1} + \sum_R B_{x+1} * \frac{E_{x+1}^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}}{j-x-1}]$$

Mais uma vez, numa perspectiva de avaliação dinâmica do plano de pensões, importa conhecer a **provisão matemática não constituída** no final do período de valorização e comparar o valor obtido com o que se determinou para o início desse período.

Por sua vez, o saldo do fundo no momento t+1 é dado por

#### Equação 71

$$F_{t+1} = F_t + I_{t+1} + C - P$$

$I_{t+1}$  identifica a rendibilidade registada no momento t+1 pelos activos que compõem o fundo; enquanto isso, C e P notam, respectivamente, o montante de contribuições realizadas a favor do fundo e o montante das pensões pagas pelo fundo, entre os momentos t e t+1. Tal como se apontou anteriormente,  $UAL_{t+1}$  resultará do confronto entre  $AL_{t+1}$  e  $F_{t+1}$ ; daí que, atendendo às correspondentes formalizações, possamos estabelecer que

#### Equação 72

$$UAL_{t+1} = UAL_t(1+i) - [C + I_C - NC_t(1+i)] - [I_{t+1} - i * F_t - I_C + I_P] -$$

$$-[\sum_S AL_{x+1} - \sum_{A_t} q_x^{(T)} * AL_{x+1}] - [\sum_R B_{x+1} * \frac{E_{x+1}^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}}{j-x-1} - (P + I_P)]$$

com  $I_C$  e  $I_P$  a indicar, respectivamente, os juros produzidos pelas contribuições realizadas durante o período de valorização e o montante de juros que deixam de ser produzidos pelas pensões entretanto pagas, ambos calculados à taxa de juro i.

Por último, afere-se o **ganho actuarial**, sendo que este corresponde à diferença entre a provisão matemática não constituída esperada e a provisão matemática não constituída real, ambas reportadas ao momento  $t+1$ . Repetimos a expressão que definimos em [49] por razões de exposição, sendo que

$$G_{t+1} = U\tilde{A}L_{t+1} - UAL_{t+1}$$

Formalizamos, ainda que

### Equação 73

$$U\tilde{A}L_{t+1} = [UAL_t + NC_t + NC_t](1+i) - (C + I_C)$$

Observando a expressão anterior, verifica-se que a provisão matemática não constituída esperada para o momento  $t+1$  resulta da soma da provisão matemática não constituída para o momento  $t$  e do custo normal para esse período, capitalizada por um período de tempo à taxa de juro técnica, à qual se deduzem as contribuições entretanto realizadas, bem como os juros respectivos.

Se a provisão matemática não constituída esperada exceder a provisão matemática não constituída efectivamente observada para o período em apreço, tal significa que  $G_{t+1} > 0$ ; o que se pode dever a um acréscimo relativo das contribuições ou à melhoria efectiva da política de investimentos do respectivo fundo. Assim, o ganho actuarial constitui um bom indicador no que concerne à avaliação destes parâmetros.

Exemplo:

Um plano de pensões de benefícios definidos, criado por uma empresa a favor dos seus trabalhadores, encontra-se a ser valorizado através do método do crédito unitário tradicional.

Relativamente a esse plano, conhecem-se as seguintes informações:

- Prestação cumulativa: 20€ por mês por cada ano de trabalho;
- Taxa de juro técnica: 4% ao ano;
- Possíveis causas de saída: falecimento e abandono;
- Idade normal de reforma: 65 anos;
- $\ddot{a}_{65}^{(12)} = 11.75$

- Dados referentes a 1 participante: Data de nascimento: 1.1.1946 data da contratação: 1.1.1988;
- Tabua de serviço:

Idade	$q_x^T$	$q_x^c$
62	0,07	0,021
63	0,08	0,023
64	0,035	0,025
65	1	0

Calcular o **custo normal** e a **previsão matemática** do plano em 1.1.2008.

Entre a data de nascimento do indivíduo (1946) e a data de avaliação do plano, decorreram 62 anos, os quais correspondem, assim, à idade deste participante. Para além disso, tendo sido contratado em 1988 (tinha, nesse momento, 42 anos), conta com 20 anos de participação no plano.

No que concerne ao custo normal, aplicaremos a expressão formalizada em [53], ou seja,

$$NC_x = b_x * j - x E_x^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}$$

Atendendo aos dados do problema, vem que

$$NC_{62} = b_{62} * 65 - 62 E_{62}^{(T)} * \ddot{a}_{65}^{(12)}$$

sendo, no caso,  $b_{62} = 20€ * 12 = 240€$ . Resulta, então, que

$$NC_{62} = 240€ * E_{62}^{(T)} * 11,75 = 240€ * \frac{D_{65}}{D_{62}} * 11,75$$

Calculamos  $\frac{D_{65}}{D_{62}}$  atendendo às probabilidades que constam na tábu de serviço, bem como à

taxa de juro técnica. Assim sendo,

$$\frac{D_{65}}{D_{62}} = (1 + 4\%)^{-3} * p_{62}^T * p_{63}^T * p_{64}^T = (1 + 4\%)^{-3} * (1 - p_{62}^T) * (1 - p_{63}^T) * (1 - p_{64}^T) =$$

$$= (1 + 4\%)^{-3} * (1 - 0,07) * (1 - 0,08) * (1 - 0,035) = 0,7340$$

$$\text{Logo, } NC_{62} = 240\text{€} * 0,7340 * 11,75 = 2.069,88\text{€}$$

Esta quantia corresponde ao montante do investimento que, nesse ano, deve ser realizado a favor do fundo de pensões, de modo a assegurar a sustentabilidade financeira do plano, no que concerne a este indivíduo em particular.

Por sua vez, como o indivíduo se encontra ao serviço da empresa há 20 anos, vem que

$$B_{62} = (20\text{€} * 12) * 20 = 4.800\text{€}$$

Por último, atendemos à expressão que permite determinar a provisão matemática, definida em [55], sendo que

$$AL_x = B_x * {}_{j-x}E_x^{(T)} * \ddot{a}_j^{(m)}$$

Vem, então, que

$$AL_{62} = B_{62} * {}_{65-62}E_{62}^{(T)} * \ddot{a}_{62}^{(T)} = 4.800\text{€} * 0,7340 * 11,75 = 41.397,60\text{€}$$

Este montante indica o valor que deverá estar acumulado no fundo, de modo a garantir o pagamento das responsabilidades futuras, associadas à pensão de reforma deste indivíduo.

### 5.1.2. MÉTODO DE CRÉDITO UNITÁRIO PROJECTADO

O método de crédito unitário projectado diferencia-se do método de crédito unitário tradicional no que se reporta à definição de  $b_x$  (e também de  $B_x$ ), uma vez que a prestação cumulativa constitui agora uma percentagem do salário auferido, obedecendo este a uma certa escala salarial. Há, assim, que entender ao modo de variação do salário e ainda às remunerações de referência que sustentam o cálculo das prestações futuras.

Uma vez determinada a prestação cumulativa, obtém-se, facilmente, a prestação acumulada, o que permite, ainda, calcular, respectivamente, o custo normal e a provisão matemática constituída.

Os restantes parâmetros surgem recorrendo a expedientes de cálculo idênticos aos descritos na secção anterior a propósito do método de crédito unitário tradicional. Assim sendo, escuso de repetir as fórmulas oportunamente propostas, optando por apresentar e discutir o exemplo seguinte:

Exemplo:

Reconsidere-se o exemplo da secção anterior. Calcule, de novo, o **custo normal** e a **provisão matemática** concernentes ao mesmo participante, na eventualidade de a prestação cumulativa corresponder a 2,2% do salário anual. Considere, ainda, que o salário à data em que o indivíduo entrou no plano equivalia a 10.000€/ano, que  $\bar{f} = 2,5\%$  e que  $\bar{g} = 0,8\%$ .

Principiamos por determinar o **custo normal**, sendo que, agora  $b_x$  depende do nível de salário projectado para a idade  $x$ . A taxa de inflação e a taxa de produtividade são constantes, donde resultará uma taxa de crescimento salarial também constante e, concomitantemente, a aplicação de uma escala salarial simples. Determinamos, primeiramente, o nível de salário aos 62 anos, sendo que

$$\begin{aligned} S_{62} &= S_{42} (1 + 2,5\% + 0,8\%)^{62-42} \\ S_{62} &= 10.000\text{€} * (1 + 3,3\%)^{20} \\ S_{62} &= 19.142,84\text{€} \end{aligned}$$

Consequentemente, de acordo com *Equação 42*,

$$b_{62} = k * S_{62} = 0,022 * 19.142,84\text{€}$$

Logo, para o custo normal, vem que

$$\begin{aligned} NC_{62} &= b_{62} * {}_{65-62}E_{62}^{(T)} * {}_{62}\ddot{a}^{(12)} \\ NC_{62} &= 421,14\text{€} * 0,7340 * 11,75 \\ NC_{62} &= 3.632,12\text{€} \end{aligned}$$

O custo normal assim obtido é maior do que o que resultou do exemplo anterior, uma vez que, no caso presente, se considera que a prestação cumulativa é função do nível de salário auferido.

Observamos, agora, que sucede para a prestação acumulada.  $B_{62}$  resulta da aplicação da taxa de 2,2% ao salário acumulado à idade de 62 anos, ou seja, à soma dos salários auferidos entre os 42 anos e os 61 anos. Recorde-se, porém, que o salário auferido aos 42 anos era de 10.000€; aos 43 anos, seria de  $10.000 \cdot (1+3,3\%)$ ; aos 44 anos, corresponderia a  $10.000 \cdot (1+3,3\%)^2$ ; e assim por diante, até que aos 61 anos será de  $10.000 \cdot (1+3,3\%)^{20-1}$ . Pelo exposto, concluímos facilmente que o salário acumulado aos 62 anos pode ser obtido através de uma renda de acumulação, com 20 termos constantes e postecipados, no montante de 10.000€ cada, e com uma taxa de 3,3%. Designando por  $W_{62}$  esse salário acumulado, vem que

$$W_{62} = 10.000 \text{€} \cdot \frac{(1+3,3\%)^{20} - 1}{3,3\%} = 277.055,84 \text{€}$$

Tomando, de seguida, [39b], surge que

$$B_{62} = k \cdot W_{62} = 2,2\% \cdot 277.055,84 \text{€} = 6.095,23 \text{€}$$

Por último, no que se reporta à **provisão matemática**, teremos que

$$AL_{62} = B_{62} \cdot {}_{65-62}E_{62}^{(T)} \cdot \ddot{a}_{62}^{(12)} = 6.095,23 \text{€} \cdot 0,7340 \cdot 11,75 = 52.568,31 \text{€}$$

Também aqui o valor obtido é maior que no caso anterior, pelas razões já avançadas.

## 5.2. MÉTODOS ACTUARIAIS DE PRESTAÇÕES PROJECTADAS

Ao invés do que sucedia nos métodos actuariais de prestações acumuladas, nos métodos actuariais de prestações projectadas recorre-se a **níveis de benefício projectado** em vez de os níveis de benefício acumulado.

Entre estes métodos, discutiremos:

- i) O **método da idade normal de entrada** no plano ou Entry Age Normal, donde resulta a abreviatura EAN;

- ii) O **método da idade normal alcançada** ou Attained Age Normal e, por isso mesmo, identificado pela sigla AAN;
- iii) Por último, o **método do prémio individual constante** ou Individual Level Premium, conhecido, ainda, pelas iniciais ILP.

### 5.2.1. MÉTODO DA IDADE NORMAL DE ENTRADA

Neste método de distribuição de custos, o equilíbrio financeiro-actuarial entre os benefícios previstos e as contribuições a realizar para o fundo de pensões é estabelecido para a idade normal de entrada, ou seja, para a **idade efectiva de adesão** de cada participante ao plano de pensões. Por conseguinte, a idade normal de entrada não corresponde a nenhum requisito legalmente estabelecido ou pré-definido no contexto do próprio plano, antes variando entre o conjunto de participantes. Para além disso, não são reconhecidos quaisquer benefícios decorrentes de serviço prestado participante em período à data de criação do plano, ao invés do que sucede no método da idade normal alcançada, tal como oportunamente elucidarei.

Na discussão deste método, atendo às possibilidades de as prestações serem projectadas: i) **sem** e ii) **com** variação salarial. Tomei, inicialmente, o caso mais simples, ou seja, aquele em que, para cada nível etário considerado, o salário permanece constante ao longo de todo o período de participação no plano.

#### i) Método EAN sem variação salarial

Principiamos por determinar o custo normal para a idade normal de entrada  $e$  relativo a cada participante. Este custo normal é o que satisfaz, nesse momento, a equação de equivalência actuarial entre os custos normais futuros e o montante da pensão projectada para a idade  $j$ , uma vez verificadas as hipóteses de partida.

Deste modo, vem que

#### Equação 74

$$NC_e * \ddot{a}_{e:j-e} = B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-e}E_e^{(T)} \quad [61a]$$

Da expressão anterior decorre que



$$NC_e = \frac{B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * j-e E_e^{(T)}}{\ddot{a}_{e:j-e}}$$

No entanto,  $j-e E_e^{(T)} = \frac{D_j}{D_e}$ ; enquanto isso,  $\ddot{a}_{e:j-e}$  corresponde ao valor actual de uma

renda imediata, temporária, com (j-e) termos antecipados, constantes e iguais à unidade, pelo

que  $\ddot{a}_{e:j-e} = \frac{N_e - N_j}{D_e}$ . Substituindo  $j-e E_e^{(T)}$  e  $\ddot{a}_{e:j-e}$  na expressão correspondente

a  $NC_e$ , vem que

#### Equação 75

$$NC_e = B_j * \ddot{a}_j^{(m)} \frac{D_j^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}} \quad [$$

Por sua vez, de acordo com a formalização de custo normal anteriormente proposta, teremos

que  $NC_e = b_e * \ddot{a}_j^{(m)} * j-e E_e^{(T)}$ . Esta expressão permite conhecer  $b_e$ , ou seja, a prestação cumulativa reconhecida a favor do beneficiário, por cada ano de trabalho do participante, a partir da idade de entrada no plano de pensões.

Retira-se, então, que

#### Equação 76

$$b_e = \frac{NC_e}{\ddot{a}_j^{(m)} * j-e E_e^{(T)}}$$

Tal como nos casos anteriores, o custo normal do plano de pensões resulta da soma dos custos normais atinentes aos vários participantes, donde

#### Equação 77

$$NC_t = \sum_{A_t} NC_e$$

o que, atendendo a [61b] equivale a ter

#### Equação 78

$$NC_t = \sum_{A_t} \frac{B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-e}E_e^{(T)}}{\ddot{a}_{e:j-e}}$$

e, bem assim,

#### Equação 79

$$NC_t = \sum_{A_t} B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * \frac{D_j^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}}$$

Convém precisar que, neste método, o custo normal se mantém constante para qualquer idade  $x$ , isto é, para qualquer momento em que se proceda à avaliação do plano, desde a idade de entrada  $e$  até à idade de jubilação  $j$ , caso se mantenham as hipóteses de partida e não haja revalorização das pensões. Esta particularidade pode ser justamente apontada como uma das vantagens intrínsecas a este método de repartição de custos, donde resulta um encargo constante para a entidade promotora, ao longo do tempo, por cada participante no plano.

Nas secções anteriores, conclui-se que, nos métodos actuariais de prestações acumuladas, os custos normais aumentam em função da idade do participante, implicando, desta feita, um encargo crescente para a entidade promotora. Sucede, porém, que muitas empresas/entidades poderão privilegiar uma lógica de curto prazo e transferir para o futuro pagamento de quantias mais elevadas, elegendo, assim, os métodos de prestações acumuladas para a repartição dos custos associados aos respectivos planos de pensões, em detrimento dos métodos de prestações projectadas.

Vejamos, agora, o que sucede relativamente à constituição da **provisão matemática** para uma unidade  $x$  posterior à idade de entrada no plano. Tal como se discutiu em tempo oportuno, esta pode ser obtida através do método *prospectivo* ou do método *retrospectivo*, os quais conduzem, necessariamente, ao mesmo resultado.

Assim, no primeiro caso, a provisão matemática traduz-se pela diferença entre o valor actuarial dos benefícios e dos custos normais futuros relativamente a essa idade  $x$ . Logo formalizamos que

#### Equação 80

$$AL_x = B_{xj} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-e}E_e^{(T)} - NC_x * \ddot{a}_{x:j-x}^{(m)}$$

ou ainda

### Equação 81

$$AL_x = B_{xj} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_x^{(T)} * \left( \frac{N_e^{(T)} - N_x^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}} \right)$$

em cuja expressão  $B_{xj}$  representa a prestação de reforma projectada para o participante desde a idade  $x$  até à idade  $j$  e que é igual a  $B_j$  caso os pressupostos de partida se mantenham constantes, isto é, caso não se observem quaisquer revalorizações do montante das pensões.

Já aplicando o método retrospectivo, a provisão matemática irá equivaler ao valor actuarial dos custos normais observados até ao momento, donde

$$AL_x = NC_e * \ddot{s}_{e:x-e}^{(T)}$$

com a  $\ddot{s}_{e:x-e}^{(T)}$  corresponder ao factor de capitalização dos custos normais que se reportam ao período de tempo entre o momento de entrada no plano e o momento  $x$ . De outro modo,

$$AL_x = B_{xj} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_x^{(T)} * \left( \frac{N_e^{(T)} - N_x^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}} \right)$$

que é exactamente a mesma formalização que a proposta em *Equação 81*.

Se pretendermos calcular a provisão matemática para a idade de entrada no plano, assumindo ambas as expressões anteriores como expressões genéricas, teremos que  $x=e$ , pelo que o valor da provisão é nulo, para ambos os métodos, sendo nulo, também, nesse momento, o valor do fundo associado ao plano de pensões.

A provisão matemática para o total de participantes do plano é dada por

$$AL_t = \sum_{A_i} AL_x$$

Logo

### Equação 82

$$AL_x = \sum_{A_j} B_{xj} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_x * \left( \frac{N_e - N_x}{N_e - N_j} \right)$$

$$x = 58 \Rightarrow AL_{58} = B_{58,65} * \ddot{a}_{65}^{(12)} * {}_{65-58}E_{58} * \left( \frac{N_{25} - N_{58}}{N_{25} - N_{65}} \right) =$$

$$= (25.000€ * 2\% * 40) * (13,764166 * \frac{D_{65}}{D_{58}} * \frac{N_{25} - N_{58}}{N_{25} - N_{65}} =$$

$$= 20.000€ * 13,764166 * \frac{12.827}{16.625} * \frac{1.278.186 - 287.094}{1.278.186 - 182.432} = 192.107,47€$$

$$AL_0 = 12 * 25.012,08€ + 10 * 36.088,89€ + 8 * 144.280,48€ + 192.107,47€ = 2.775.815,05€$$

$$NC_x = k * S_x$$

$$NC_x = B_j - \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_e^{(T)} * \left( \frac{s_{D_e}^{(T)}}{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}} \right) * \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_e}$$

$$NC_t = \sum_{A_j} NC_x = \sum_{A_j} B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * \frac{D_j^{(T)}}{D_e^{(T)}} * \left( \frac{s_{D_e}^{(T)}}{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}} \right) * \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_e}$$

Por sua vez, a provisão matemática para um participante à idade  $x+1$ , por analogia com [64b], é dada por

### Equação 83

$$AL_{x+1} = B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E_{x+1}^{(T)} * \left( \frac{N_e^{(T)} - N_{x+1}^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}} \right)$$

$B_{x+1,j}$  será igual a  $B_{xj}$  se não houver alteração do valor da prestação projectada. Porém,

se  $B_{x+1,j}$  for alvo de qualquer incremento, teremos que  $\Delta B_{x+1,j} = B_{x+1,j} - B_{xj}$  pelo

que podemos reescrever *Equação 83* do seguinte modo:

#### Equação 84

$$AL_{x+1} = B_{xj} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E_{x+1}^{(T)} * \left( \frac{N_e^{(T)} - N_{x+1}^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}} \right) +$$

$$+ \Delta B_{x+1, j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E_{x+1}^{(T)} * \left( \frac{N_e^{(T)} - N_{x+1}^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}} \right)$$

No que concerne à provisão matemática relativa ao momento t+1, recordamos que, tomando o conjunto de participantes no plano como um conjunto fechado, vem que  $A_{t+1} = A_t - (S + R)$ . Tal implica que, no final do período de valorização do plano, as pensões projectadas para os participantes correspondentes a S e a R não devam ser consideradas para os efeitos do cálculo da provisão matemática, uma vez que esses participantes já não estão integrados no plano.

Daí resulta que

#### Equação 85

$$A_{t+1} = \sum_{A_t} + A_t - \sum_{S+R} AL_{x+1}$$

Desenvolvendo a expressão anterior, vem que

#### Equação 86

$$AL_{t+1} = [AL_t + NC_t](1+i) + \sum_{A_{t+1}} \Delta B_{x+1, j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E_{x+1}^{(T)} *$$

$$* \left( \frac{N_e^{(T)} - N_{x+1}^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}} \right) + \sum_{A_t} q_x^{(T)} * \hat{A}L_{x+1} - \sum_{S+R} \hat{A}L_{x+1}$$

Tal como definimos para os métodos de prestações acumuladas, a **provisão matemática não constituída** traduz a diferença existente, num dado momento, entre a provisão matemática constituída e o valor acumulado no fundo que financia o plano em apreço. Assim sendo, para t+1, vem que  $UAL_{t+1} = AL_{t+1} - F_{t+1}$ , ou, desenvolvendo a expressão,

### Equação 87

$$\begin{aligned}
 UAL_{t+1} = & AL_t(1+i) - [C + I_c - NC_t * (1+i)] - [I_{t+1} - i * F_t - I_c + I_p] + \\
 & + \sum_{A_{t+1}} \Delta B_{x+1, j} * \ddot{a}_j^{(m)} * \frac{D_j^{(T)}}{D_{x+1}^{(T)}} * \left( \frac{N_e^{(T)} - N_{x+1}^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}} \right) - \\
 & - [\sum_S \hat{AL}_{x+1} - \sum_{A_t} q_x^{(T)} * \hat{AL}_{x+1}] - [\sum \hat{AL}_{x+1} - (P + I_p)]
 \end{aligned}$$

Por sua vez, o **ganho actuarial** reflecte os desvios observados durante o período de valorização relativamente às hipóteses inicialmente apontadas, sendo que

$$G_{t+1} = [UAL_t + NC_t](1+i) - (C + I_c) - UAL_{t+1}$$

A expressão anterior, embora coincidente com a que definimos para o método do crédito tradicional, conduzirá necessariamente a resultados diferentes, por serem distintas as hipóteses de partida e, bem assim, os valores envolvidos.

Exemplo:

São conhecidos os seguintes elementos relativos a um plano de pensões promovido por uma organização a favor dos seus colaboradores, valorizado através do método da idade normal de entrada:

- A prestação cumulativa anual corresponde a 2% do salário auferido;
- Não se prevê qualquer crescimento dos salários;
- Todos os participantes entraram no plano com a idade de 25 anos;
- Idade normal de reforma: 65 anos;
- A única causa de saída possível é o falecimento;
- Dados relativos ao colectivo de participantes em 1/1/2009 e respectivos símbolos de comutação:

Idade x	N.º Participantes	Salário anual (em euros)	D <sub>x</sub>	N <sub>x</sub>
25	0	-	47,032	1,278,186
37	12	13,200	32,691	797,621
40	10	14,500	29,816	702,477
55	8	22,000	18,429	340,549
58	5	25,000	16,625	287,094
65	0	27,500	12,827	182,432

Pretende-se que calcule o custo normal e a provisão matemática do plano em 1.1.2009.

Como sabemos, no início de cada período de valorização, o custo normal associado a um plano de pensões é igual ao somatório dos custos normais atinentes a cada um dos participantes, isto é,

$$NC_t = \sum_{A_t} NC_e$$

ou, ainda,

$$NC_0 = \sum_{A_0} NC_e$$

Por sua vez, por intermédio de [63c], estabelecemos que

$$NC_0 = \sum_{A_t} B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * \frac{D_j^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}}$$

expressão esta que, uma vez aplicada ao caso em apreço, permite escrever que

$$NC_0 = \sum_{A_0} B_{65} * \ddot{a}_{65}^{(12)} * \frac{D_{65}}{N_{25} - N_{65}}$$

Calculamos, desde logo  $\sum_{A_0} B_{65}$  e  $\ddot{a}_{65}^{(12)}$ , donde

$$\sum_{A_0} B_{65} = (12 * 13.200€ * 2\% * 40) + (10 * 14.500€ * 2\% * 40) + (8 * 2.00€ * 2\% * 40) +$$

$$+ (5 * 25.000€ * 2\% * 40) = 483.520€$$

Já no que se refere a  $\ddot{a}_{65}^{(12)}$ , segundo a qual  $\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$ , logo

$$\ddot{a}_{65}^{(12)} = \ddot{a}_{65} - \frac{12-1}{2*12} = \frac{N_{65}}{D_{65}} - \frac{12-1}{2*12}$$

Retiramos os símbolos de comutação da tabela que nos é facultada, os quais, sublinhe-se, reportam todas as causas de saída possíveis e que, no caso presente, se limitam ao falecimento. Vem, assim que

$$\ddot{a}_{65}^{(12)} = \frac{182.432}{12.827} - \frac{11}{24} = 13,764166$$

Por fim, vem que

$$NC_0 = 483.520\text{€} * 13,764166 * \frac{12.827}{1.278.186 - 182.432}$$

$$NC_0 = 77.906,98\text{€}$$

O **custo normal** associado ao plano de pensões, no início de 2009, era de 77.906,98€.

Determinamos, de seguida, a **provisão matemática** relativa à mesma data.

Como vimos anteriormente,

$$AL_t = \sum_{A_t} AL_x$$

ou seja,

$$AL_0 = \sum_{A_0} AL_x = 12 * AL_{37} + 10 * AL_{40} + 8 * AL_{55} + 5 * AL_{58}$$

Calculamos cada um dos  $AL_x$  atendendo a Equação 82, logo a

$$AL_x = \sum_{A_j} B_{xj} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_x^{(T)} * \left( \frac{N_e^{(T)} - N_x^{(T)}}{N_e^{(T)} - N_j^{(T)}} \right)$$

que poderemos simplificar para  $AL_x = \sum_{A_j} B_{xj} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_x * \left( \frac{N_e - N_x}{N_e - N_j} \right)$ , uma vez que

o falecimento é a única causa de saída possível.

Para,

$$\begin{aligned} x = 37 &\Rightarrow AL_{37} = B_{37,65} * \ddot{a}_{65}^{(12)} * {}_{65-37}E_{37} * \left( \frac{N_{25} - N_{37}}{N_{25} - N_{65}} \right) = \\ &= (13.200\text{€} * 2\% * 40) * (13,764166 * \frac{D_{65}}{D_{37}} * \frac{N_{25} - N_{37}}{N_{25} - N_{65}}) = \\ &= 10.560\text{€} * 13,764166 * \frac{12.827}{32.691} * \frac{1.278.186 - 797.621}{1.278.186 - 182.432} = 25.012,08\text{€} \end{aligned}$$

Para,



$$\begin{aligned}
x = 40 &\Rightarrow AL_{40} = B_{40,65} * \ddot{a}_{65}^{(12)} * {}_{65-40}E_{40} * \left( \frac{N_{25} - N_{40}}{N_{25} - N_{65}} \right) = \\
&= (14.500€ * 2\% * 40) * (13,764166 * \frac{D_{65}}{D_{40}} * \frac{N_{25} - N_{40}}{N_{25} - N_{65}} = \\
&= 11.600€ * 13,764166 * \frac{12.827}{29.816} * \frac{1.278.186 - 702.477}{1.278.186 - 182.432} = 36.088,89€
\end{aligned}$$

Para,

$$\begin{aligned}
x = 55 &\Rightarrow AL_{55} = B_{55,65} * \ddot{a}_{65}^{(12)} * {}_{65-55}E_{55} * \left( \frac{N_{25} - N_{55}}{N_{25} - N_{65}} \right) = \\
&= (22.000€ * 2\% * 40) * (13,764166 * \frac{D_{65}}{D_{55}} * \frac{N_{25} - N_{55}}{N_{25} - N_{65}} = \\
&= 17.600€ * 13,764166 * \frac{12.827}{18.429} * \frac{1.278.186 - 340.549}{1.278.186 - 182.432} = 144.280,48€
\end{aligned}$$

Para,

$$\begin{aligned}
x = 58 &\Rightarrow AL_{58} = B_{58,65} * \ddot{a}_{65}^{(12)} * {}_{65-58}E_{58} * \left( \frac{N_{25} - N_{58}}{N_{25} - N_{65}} \right) = \\
&= (25.000€ * 2\% * 40) * (13,764166 * \frac{D_{65}}{D_{58}} * \frac{N_{25} - N_{58}}{N_{25} - N_{65}} = \\
&= 20.000€ * 13,764166 * \frac{12.827}{16.625} * \frac{1.278.186 - 287.094}{1.278.186 - 182.432} = 192.107,47€
\end{aligned}$$

Retomando a expressão definida para  $AL_0$ , vem que

$$AL_0 = 12 * 25.012,08€ + 10 * 36.088,89€ + 8 * 144.280,48€ + 192.107,47€ = 2.775.815,05€$$

A provisão matemática referente ao início de 2009 é de 2.755.815,05€.

## ii) Método EAN com variação salarial

Nesta modalidade, teremos que o custo normal variará em função do salário auferido, logo, grosso modo, em função da idade do participante. Em consequência, o custo normal será crescente e dependerá da idade atingida pelo participante à data de valorização do plano. Este ponto distingue, justamente, o método em apreço quando comparado com o método da idade

normal de entrada sem variação salarial, já que, neste último, o custo normal se mantém imutável durante a permanência do participante no plano. Desde logo, define-se que

**Equação 88**

$$NC_x = k * S_x$$

Mais uma vez, o valor actual das prestações projectadas deve corresponder ao valor actual das contribuições a realizar, donde

**Equação 89**

$$NC_e * s_{\ddot{a}_{e:j-e}}^{(T)} = B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_x^{(T)}$$

com  $s_{\ddot{a}_{e:j-e}}^{(T)}$  a notar o valor actual por cada unidade monetária de salário futuro a auferir pelo participante, até atingir a idade de reforma.

De acordo com as expressões anteriores, podemos, ainda estabelecer que

**Equação 90**

$$NC_e * s_{\ddot{a}_{e:j-e}}^{(T)} = k * S_e * s_{\ddot{a}_{e:j-e}}^{(T)}$$

Retomando a expressão que permite calcular o custo normal à idade x e atendendo ao desenvolvimento de  $k * S_e$ , vem que

**Equação 91**

$$NC_x = B_j - \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_e^{(T)} * \left( \frac{s_D^{(T)} e}{s_N^{(T)} e - s_N^{(T)} j} \right) * \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_e}$$

Os símbolos  $s_D$  e  $s_N$  referem-se às funções de comutação construídas no pressuposto do crescimento dos salários. Acresce que a expressão anterior equivale a ter

### Equação 92

$$NC_x = NC_e * \frac{\epsilon_x}{\epsilon_e}$$

Tal corrobora o que anteriormente se afirmou, no que tange ao facto de o custo normal depender da taxa de crescimento dos salários e, bem assim, da idade x alcançada por cada participante; enquanto isso, no caso anterior, o custo normal permanecia constante ao longo de toda a vida activa de cada indivíduo.

O custo normal total no início de cada período de valorização t é dado pelo somatório dos custos normais associados a cada participante, donde

### Equação 93

$$NC_t = \sum_{A_t} NC_x = \sum B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * \frac{D_j^{(T)}}{D_e^{(T)}} * \left( \frac{s_{D_e}^{(T)}}{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}} \right) * \frac{\epsilon_x}{\epsilon_e}$$

$$AL_t = \sum_{A_t} B_{x,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E^{(T)} * \left( \frac{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_x}^{(T)}}{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}} \right)$$

$$AL_{x+1} = [AL_x + NC_x](1+i) + q_x^{(T)} * \hat{A}L_{x+1} + \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E^{(T)} - \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E^{(T)} * \left( \frac{s_{D_e}^{(T)} \epsilon_{x+1}}{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}} \right) * \left( \frac{s_{N_{x+1}}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}}{s_{D_{x+1}}^{(T)} \epsilon_e} \right)$$

Já no que se reporta à provisão matemática, defini-la-emos como sendo a diferença entre o valor actual das prestações projectadas e os custos normais futuros, no início de cada período de valorização do plano, pelo que

### Equação 94

$$AL_x = B_{x,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E^{(T)} - NC_x * \frac{s_{N_x}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}}{s_{D_x}^{(T)}}$$

o que é o mesmo que ter

**Equação 95**

$$AL_x = B_{x,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E^{(T)} * \left( \frac{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}}{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}} \right)$$

Consequentemente, para a totalidade dos participantes no plano, vem que

**Equação 96**

$$AL_t = \sum_{A_t} B_{x,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E^{(T)} * \left( \frac{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}}{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}} \right)$$

Por sua vez, no final do período de valorização, a provisão matemática para cada participante vem dada por

**Equação 97**

$$AL_{x+1} = [AL_x + NC_x](1+i) + q_x^{(T)} * \hat{A}L_{x+1} + \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E_{x+1}^{(T)} - \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E_e^{(T)} \left( \frac{s_{D_e}^{(T)} \epsilon_{x+1}}{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}} \right) \left( \frac{s_{N_{x+1}}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}}{s_{D_{x+1}}^{(T)} \epsilon_e} \right)$$

No mesmo momento, a provisão matemática para o conjunto de participantes resulta da soma das provisões individuais, donde

**Equação 98**

$$AL_{t+1} = [AL_t + NC_t](1+i) + \sum_{A_t} q_x^{(T)} * \hat{A}L_{x+1} + \sum_{A_{t+1}} \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E_{x+1}^{(T)} - \sum_{A_{t+1}} \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E_e^{(T)} \left( \frac{s_{D_e}^{(T)} \epsilon_{x+1}}{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}} \right) \left( \frac{s_{N_{x+1}}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}}{s_{D_{x+1}}^{(T)} \epsilon_e} \right)$$

Convém precisar que os terceiro e quarto termos do braço direito da expressão anterior representam os efeitos decorrentes de uma eventual revalorização do valor da pensão

projectada, respectivamente, ao nível do valor actuarial das prestações futuras e ao nível do valor actuarial dos custos normais futuros.

Sublinhe-se, ainda, que esses termos serão iguais a zero caso não ocorra nenhuma revalorização.

A **provisão matemática não constituída** compara os recursos detidos pelo fundo com o nível de recursos que permite assegurar a sua sustentabilidade financeira.

#### Equação 99

$$\begin{aligned}
 UAL_{t+1} = & UAL_t(1+i) - [C + I_c - NC_t(1+i)] - [(I_{t+1} - \tilde{I}_t] - \\
 & - [\sum_S \hat{A}L_{x+1} - \sum_{A_t} q_x^{(T)} * \hat{A}L_{x+1}] - [\sum_R \hat{A}L_{t+1} - (P + I_P)] + \\
 & + \sum_{A_{t+1}} \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * (\frac{D_j^{(T)}}{D_{x+1}^{(T)}}) - \sum \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-e}E_e^{(T)} (\frac{D_j^{(T)}}{D_e^{(T)}}) (\frac{s_{D_e}^{(T)}}{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}}) * \\
 & * (\frac{s_{N_{x+1}}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}}{s_{D_{x+1}}^{(T)} * \epsilon_e})
 \end{aligned}$$

Mais uma vez, e à semelhança do método anterior, o ganho actuarial é obtido de modo idêntico ao estabelecido para o método do crédito unitário tradicional, cuja expressão apontamos de novo:

$$G_{t+1} = [UAL_t + NC_t](1+i) - (C + I_c) - UAL_{t+1}$$

Exemplo:

Considere um plano de pensões com três participantes (A,B e C), relativamente aos quais conhecidos os seguintes elementos, que se reportam a 1.1.2009:

Participante	$e$	$x$	Salário Anual	$\frac{\mathcal{E}_{64}}{\mathcal{E}_x}$	$D_e$	${}^sD_e$	$N_e$	${}^sN_e$
A	30	35	16,800 €	1,583	30,100	34,000	650,000	720,000
B	40	45	21,000 €	1,231	20,200	22,000	396,000	420,000
C	35	60	28,000 €	1,014	10,400	10,800	187,000	275,000
		65		1	9,100	9,500	170,000	182,500

Para além disso, devemos atender às seguintes informações:

- Idade normal de reforma: 65 anos;
- $\ddot{a}_{65}^{(12)} = 10,75$ ;
- O falecimento é a única causa de saída possível;
- A prestação de reforma vai corresponder a 1,5% do salário final por cada ano de serviço efectivo.

Determine o **custo normal** do plano em 1.1.2009, bem como a respectiva **provisão matemática**.

O **custo normal** do plano em 1.1.2009 é igual ao somatório do custo normal dos vários participantes na mesma data, pelo que

$$NC_0 = NC_A + NC_B + NC_C$$

Assim, principiamos por determinar o custo normal associado a cada um dos participantes. A expressão anterior pode também ser definida em função das idades de entrada no plano de cada um dos participantes, donde

$$NC_0 = 1.813,22\text{€} + 3.532,71\text{€} + 13.837,60\text{€}$$

$$NC_0 = 19.183,53\text{€}$$

Desde logo, o valor da prestação será, em termos genéricos, dado por

$$B_j = k * (j - e) * S_x * \frac{\mathcal{E}_{64}}{\mathcal{E}_x}$$

Para o participante A, temos que  $e=35$  e  $x=30$ ; vem que

$$NC_{30} * {}^s\ddot{a}_{30:65-30}^{(T)} = k_{30} * S_{30} * {}^s\ddot{a}_{30:65-30}^{(T)} = B_{65} * \ddot{a}_{65}^{(12)} * {}_{65-30}E_{30}^{(T)}$$

expressão que, ao desenvolvermos, dará lugar a

$$k_{30} * S_{30} * \left( \frac{s_{N_e}^{(T)} - s_{N_j}^{(T)}}{s_{D_e}^{(T)}} \right) = B_{65} * \ddot{a}_{65}^{(12)} * \frac{D_{65}}{D_{30}}$$

Substituímos pelos valores recolhidos na tabela, sendo que

$$k_{30} * 16.800€ * \left( \frac{720.000 - 182.500}{34.000} \right) = 0,015 * (65 - 30) * 16.800€ * 10,75 * \frac{9.100}{30.100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_{30} * 265.588,2353 = 28.665 \Leftrightarrow k_{30} = 0,10793$$

Por sua vez,  $NC_e = k_e * S_e$ , logo

$$NC_{30} = 0,10793 * 16.800€ = 1.813,22€$$

Repetimos os procedimentos descritos para os restantes participantes, atendendo às respectivas idades de entrada no plano.

$$\text{Para o participante B, } NC_{40} = 0,1682243356 * 21.000€ = 3.532,71€$$

$$\text{Para o participante C, } NC_{35} = 0,04942 * 28.000€ = 13.837,60€$$

Substituindo, de seguida, os custos normais de cada participante na expressão que permite determinar o custo normal total, logo

$$NC_0 = NC_{30} + NC_{40} + NC_{35}$$

$$NC_0 = 1.813,22€ + 3.532,71€ + 13.837,60€$$

$$NC_0 = 19.183,53€$$

O custo normal para o conjunto de participantes é de 19.183,53€.

### 5.2.2. MÉTODO DA IDADE NORMAL ALCANÇADA

Este método aplica-se, de modo particular, nos casos em que o participante ingressou na empresa promotora do plano de pensões em data anterior à constituição desse plano e aquela

empresa pretende reconhecer ao trabalhador benefícios relativos ao lapso de tempo não coberto.

O método da idade normal alcançada percorre procedimentos muito semelhantes aos descritos para o método da idade normal de entrada, substituindo a idade normal de entrada e pela idade alcançada  $a$ .

Principiamos, assim, por determinar o custo normal associado ao plano, atendendo, de novo, à equação que estabelece a equivalência actuarial entre os custos e o valor das prestações. Sendo  $a$  a idade alcançada pelo participante no momento da criação do plano, surge que

#### **Equação 100**

$$NC_a * \ddot{a}_{a:j-a} = B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_a^{(T)}$$

Individualizando, ainda,  $NC_a$  no braço esquerdo da expressão e considerando os desenvolvimentos de  $\ddot{a}_{a:j-a}$  e de  ${}_{j-x}E_a^{(T)}$ , vem que

#### **Equação 101**

$$NC_a = B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * \frac{D_j^{(T)}}{N_a^{(T)} - N_j^{(T)}}$$

Ambas as expressões são em tudo semelhantes às definidas em Equação 74 e Equação 75, no contexto do método da idade normal de entrada sem crescimento salarial, muito embora o método da idade normal de entrada conduza a um custo normal inferior, isto para iguais níveis de prestação projectada.

Também a provisão matemática se obtém de modo análogo ao referido para o método da idade normal de entrada, ou seja,

#### **Equação 102**

$$AL_x = B_j * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_a^{(T)}$$

Porém, uma das características que singulariza este método é o facto de a provisão matemática não constituída ser calculada de acordo com os procedimentos definidos pelo



método do crédito unitário tradicional. Assim, no momento de criação do plano, para um participante com idade alcançada  $a$ , vem que

**Equação 103**

$$UAL_a = B_a * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-a}E_a^{(T)}$$

Por seu turno, para o total de participantes, obtém-se que

**Equação 104**

$$UAL_0 = \sum_{A_0} B_a * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-a}E_a^{(T)}$$

O método em apreço não é, contudo, muito utilizado em termos práticos, o que certamente se justifica pelo facto de, em regra, as entidades promotoras não validarem direitos prévios ao surgimento dos planos de pensões. Assim sendo, escusamo-nos de apresentar quaisquer exemplos ilustrativos.

### 5.2.3. MÉTODO DO PRÉMIO CONSTANTE INDIVIDUAL

Neste método, não são reconhecidas quaisquer prestações anteriores à data de criação do plano; assim, o **custo normal** é calculado atendendo aos procedimentos descritos para o método da idade normal de entrada, assumindo, no presente contexto, que a idade normal de entrada corresponde à idade atingida, nesse momento, pelo participante. Deste modo, retomamos a expressão formalizada na Equação 100, sendo que  $B_{a,j}$  indica o montante da pensão de reforma projectado para o momento  $j$  e para cada participante, à data de constituição do plano.

**Equação 105**

$$NC_a * \ddot{a}_{a:j-a} = B_{a,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-a}E_a^{(T)}$$

Da expressão anterior, resulta, ainda que

### Equação 106

$$NC_x = B_{a,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * \frac{D_j^{(T)}}{N_a^{(T)} - N_j^{(T)}}$$

$$S_{inicial} = 1.500€(1+ 2,5\%)^{-26} = 789,35€$$

$$B_{65}$$

$$\frac{24.562,438}{34.780,838}$$

$$AL_x = B_{x,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * j-x E_x^{(T)} - NC_a * \ddot{a}_{x:j-x}^{(m)}$$

$$NC_t = \sum_{A_t} NC_x =$$

$$\frac{D_j}{D_x}$$

$$NC_a$$

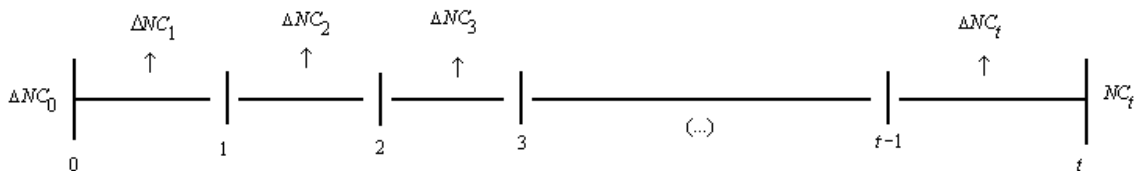
$$\ddot{a}_{x:j-x}^{(m)}$$

$$\ddot{a}_{x:j-x}^{(m)}$$

$$AL_t = \sum_{A_t} AL_x =$$

O custo normal assim obtido, determinado para a idade alcançada por cada participante no momento da criação do plano de pensões, **permanecerá constante ao longo do tempo**, excepto se forem revistas as condições iniciais, estabelecidas pelo actuário aquando da definição da base técnica.

Caso se tenha observado, por exemplo, uma revalorização das prestações projectadas, o custo normal correspondente ao período que decorre de t a t+1 será dado pelo custo normal previsto aquando da constituição do plano acrescido dos custos que decorrem dessa revalorização, atinentes a cada um dos períodos volvidos. Vejamos o esquema seguinte:



Podemos, assim, formalizar que

$$NC_t = NC_0 + \Delta NC_1 + \Delta NC_2 + \Delta NC_3 + \dots + \Delta NC_t$$

Recordemos que  $\Delta B_{x+1,j}$  identifica o acréscimo da prestação projectada, após a idade  $x+1$ , que resulta da alteração dos níveis salariais inicialmente previstos.

Este acréscimo, uma vez observado, repercute-se, necessariamente, ao nível do custo normal, originando um **custo normal suplementar**. Se convencionarmos que  $\Delta NC_{x+1}$  representa o nível adicional de financiamento originado pelo aumento das prestações, tomando a equação que permite estabelecer o equilíbrio actuarial entre o valor das prestações futuras e os custos respectivos, teremos que

$$\Delta NC_{x+1} * \ddot{a}_{x+1:j-x-1}^{(T)} = \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-a}E_{x+1}^{(T)}$$

Individualizamos, de novo,  $\Delta NC_{x+1}$ , donde

$$\Delta NC_{x+1} = \frac{\Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E_{x+1}^{(T)}}{\ddot{a}_{x+1:j-x-1}^{(T)}}$$

e ainda

#### **Equação 107**

$$\Delta NC_{x+1} = \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * \frac{D_j^{(T)}}{N_{x+1}^{(T)} - N_j^{(T)}}$$

Por último, podemos determinar  $NC_{x+1}$ , sendo que

#### **Equação 108**

$$NC_{x+1} = NC_x + \Delta NC_{x+1} = NC_x + \Delta B_{x+1,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * \frac{D_j^{(T)}}{N_{x+1}^{(T)} - N_j^{(T)}}$$

Detemo-nos, de seguida, no cálculo da **provisão matemática**. Para cada idade alcançada  $x$ , posterior à data de entrada em funcionamento do plano, a provisão matemática corresponde à diferença entre o valor actuarial das prestações projectadas e o valor actuarial do custo normal, donde

**Equação 109**

$$AL_x = B_{x,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-a}E_x^{(T)} - NC_a * \ddot{a}_{x:j-x}^{(m)}$$

Por sua vez, no final do período de valorização vem que:

**Equação 110**

$$AL_{x+1} = [B_{x,j} + \Delta B_{x+1,j}] * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x-1}E_{x+1}^{(T)} - B_x * \ddot{a}_j^{(m)} * \left( \frac{D_j^{(T)}}{N_x^{(T)} - N_j^{(T)}} \right) \left( \frac{N_{x+1}^{(T)} - N_j^{(T)}}{D_{x+1}^{(T)}} \right) + \\ + \Delta B_x * \ddot{a}_j^{(m)} * \left( \frac{D_j^{(T)}}{N_{x+1}^{(T)} - N_j^{(T)}} \right) \left( \frac{N_{x+1}^{(T)} - N_j^{(T)}}{D_{x+1}^{(T)}} \right)$$

Efectuando os necessários desenvolvimentos, esta expressão equivale a ter:

**Equação 111**

$$AL_{x+1} = NC_x * \frac{1}{{}_1E_x^{(T)}} = NC_x * \frac{D_x^{(T)}}{D_{x+1}^{(T)}}$$

Tomando, agora, o total de participantes no plano de pensões, vem que

**Equação 112**

$$AL_{x+1} = [AL_t + NC_t](1+i) - \sum_R AL_{t+1} - \left[ \sum_T AL_{x+1} * \sum_{A_t} q_x^{(T)} AL_{x+1} \right]$$

A provisão matemática não constituída relativa ao final do período de valorização decorre de procedimentos idênticos aos já apontados nos métodos anteriores, pelo que

**Equação 113**

$$UAL_{t+1} = UAL_t(1+i) - [C + I_c - NC_t * (1+i)] - [I_{t+1} - \tilde{I}_{t+1}] - \\ - \left[ \sum_S AL_{x+1} - \sum_{A_t} q_x^{(T)} * AL_{x+1} \right] - \left[ \sum_R AL_{x+1} - (P + I_p) \right]$$

Mais uma vez, o **ganho actuarial** resulta da aplicação da fórmula definida para os métodos anteriores, ou seja,  $G_{t+1} = [UAL_t + NC_t](1+i) - (C + I_c) - UAL_{t+1}$ , divergindo, porém, no que concerne ao cálculo da provisão matemática não constituída e do custo normal.

Exemplo:

Uma empresa criou um plano de pensões em benefício dos seus funcionários em 1.1.1997. Esse plano envolve três participantes, nascidos, respectivamente, em 1958, 1962 e 1967, muito embora todos tenham sido contratados pela empresa com a idade de 25 anos. Por sua vez, a idade de reforma é de 65 anos, sendo o falecimento a única causa de saída possível.

A prestação cumulativa corresponde a 2% da remuneração mensal, por cada ano de serviço efectivo. Na base técnica do plano, definiu-se que os salários variam a uma taxa anual de 2,5%. O trabalhador mais jovem auferir um salário mensal de 1.100€; enquanto isso, o trabalhador mais antigo recebe 1.500€ mensais e o outro trabalhador recebe 1.250€ mensais.

Sabendo que a valorização do plano ocorre de acordo com os símbolos de comutação contidos na TV 88-90 e que o método escolhido é o método do prémio constante individual, determine o custo normal e a provisão matemática em 1.1.2009

Devemos, atender, previamente, à idade dos participantes, tanto no momento de valorização como no momento de constituição do plano (já que o custo normal é determinado em função do método da idade normal de entrada). Assim, apuramos  $x$  e  $a$  para cada um deles e colocamos os valores respectivos numa tabela, a qual nos auxiliará na sistematização dos elementos necessários ao cálculo de  $NC_t$  e de  $AL_t$ .

Por sua vez, a expressão que permite calcular o custo normal é a que se definiu na Equação 105, logo

$$NC_a = B_{a,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * \frac{D_j^{(T)}}{N_a^{(T)} - N_j^{(T)}}$$

$B_{65}$  variará consoante os casos, pois nem todos os participantes auferem o mesmo salário; porém, quando atingirem a idade de 65 anos, todos terão prestado 40 anos de serviço. Como determinar, então,  $B_{65}$ ?

Conhecendo os salários actuais e sabendo, ainda, que estes cresceram a uma taxa de 2,5% ao ano, podemos calcular o salário mensal auferido no início da carreira. Por sua vez, a prestação projectada corresponderá a 2% da soma desses salários mensais, equivalendo esta última ao

valor de uma renda de acumulação com 40 termos, com uma taxa igual à taxa de crescimento dos salários e sendo o primeiro termo o salário auferido no início da carreira.

- O participante mais novo nasceu em 1967, tem 42 anos, auferir 1.100€ e foi contratado há 17 anos, logo

$$S_{inicial} = 1.100€(1 + 2,5\%)^{-17} = 722,91€$$

Por sua vez,  $B_{65} = 2\% * [722,91€ * \frac{(1 + 2,5\%)^{40} - 1}{2,5\%}] = 974,52€$

- O participante que nasceu em 1962, tem 47 anos, auferir 1.250€, tendo sido contratado há 22 anos, donde

$$S_{inicial} = 1.250€(1 + 2,5\%)^{-22} = 726,08€$$

- O participante mais velho nasceu em 1958, tendo, por isso, 51 anos, auferir um salário de 1.500€ e foi contratado há 26 anos. Do exposto decorre que

$$S_{inicial} = 1.500€(1 + 2,5\%)^{-26} = 789,35€$$

Por conseguinte,  $B_{65} = 2\% * [789,35€ * \frac{(1 + 2,5\%)^{40} - 1}{2,5\%}] = 1.064,08€$

Retiramos da TV 88-90 os valores relativos a  $\frac{D_j}{N_a - N_j}$ , ao mesmo tempo que calculamos

$\ddot{a}_j^{(m)}$ , sendo, no caso presente, que

$$\ddot{a}_{65}^{(12)} = \frac{N_{65}}{D_{65}} - \frac{12-1}{2*12} = \frac{403.145,702}{24.562,438} - \frac{11}{24} \cong 15,955$$

Idade x	a	$B_{65}$	$\frac{D_j}{N_a - N_j}$	$NC_x$
Nascido em 1967 -> x=42	30	974,52	$\frac{24.562,438}{1.755.587,814 - 403.145,702}$	282,38
Nascido em 1962 -> x=47	35	978,79	$\frac{24.562,438}{1.494.820,557 - 403.145,702}$	351,37
Nascido em 1958 -> x=51	39	1,064,08	$\frac{24.562,438}{1.304.700,693 - 403.145,702}$	462,54
$NC_t = \sum_{A_t} NC_x =$				1,096,29

Detemo-nos, agora, no cálculo de  $AL_t$ , sendo que a provisão associada a cada participante se calcula de acordo com

$$AL_x = B_{x,j} * \ddot{a}_j^{(m)} * {}_{j-x}E_x^{(T)} - NC_a * \ddot{a}_{x:j-x}^{(m)}$$

Recorremos, mais uma vez, a uma tabela, onde sistematizamos os dados necessários aos cálculos.

Idade x	$B_{65}$	$\frac{D_j}{D_x}$	$NC_a$	$\ddot{a}_{x:j-x}^{(m)}$	$AL_x$
42	974,52	$\frac{24.562,438}{42.347,256}$	282,38	31,1164	231,84
47	978,79	$\frac{24.562,438}{38.016,932}$	351,37	22,8841	2,048,97
51	1,064,08	$\frac{24.562,438}{34.780,838}$	462,54	16,9204	4,163,18
				$AL_t = \sum_{A_t} AL_x =$	6,443,99

## 6. CONCLUSÃO

As conclusões em termos de futuro demográfico são as mesmas para todos os países. As taxas de natalidade e de mortalidade baixaram ou estão em declínio um pouco por toda a parte. Este fenómeno está a conduzir a um aumento da proporção de pessoas idosas na população total. A não ser, que a idade de reforma aumente (medidas que começam a ser repensadas já noutros países europeus), que a idade do início da vida activa baixe (de facto, tem aumentado) ou que a taxa de participação de mão-de-obra jovem cresça o suficiente para compensar os efeitos dessas tendências demográficas, o número de reformados em relação ao de trabalhadores activos também aumentará.

Este processo está já em curso na maior parte dos países desenvolvidos e em vias de desenvolvimento e começará, em breve, nos outros. Nos anos 2030 e 2040 todos os países terão registado um forte aumento no rácio entre reformados e trabalhadores activos.

O envelhecimento da população fará aumentar a parte da produção nacional que tem de ser transferida para as pessoas idosas, a fim de estas manterem um determinado nível de vida e, em consequência, fará elevar o custo para os trabalhadores activos dos sistemas de segurança social em regime de repartição, situação que se verifica actualmente em Portugal. À medida que a proporção das pessoas idosas aumenta, mais elevadas têm de ser as contribuições para que os reformados possam receber uma certa percentagem das suas remunerações anteriores.

Face a esta perspectiva, muitos países foram levados a rever as obrigações que assumiram em relação aos regimes de segurança social em sistema de repartição. Várias opções estão em aberto. Em primeiro lugar, podem manter a segurança social aos níveis actuais, mudando, contudo, do princípio do financiamento em sistema de repartição para o financiamento em regime de capitalização. Em segundo lugar, podem continuar a manter o princípio do financiamento em sistema de repartição, mas reduzir as prestações futuras. Em terceiro lugar, podem substituir uma parte ou a totalidade das prestações dos regimes públicos por pensões de regimes privados. Essas soluções podem ser adoptadas isoladamente ou em conjunto.

Contudo, as várias soluções expostas, como possível resolução ou melhoramento dos sistemas de segurança social, apresentam uma grande dose de complexidade. Para isso, os países antes de determinarem qual o caminho a seguir, deverão avaliar o custo total real das pensões, bem



como os aspectos distributivos: quem suportará o custo das pensões e quem beneficiará das prestações?

Avanço cinco premissas:

O custo Real total das pensões por pensionista é menos elevado num sistema em regime financiado em regime de repartição do que num sistema financiado em capitalização, mas, paradoxalmente, o nível de vida dos trabalhadores activos tende a baixar se o regime de pensões for financiado segundo o mecanismo de repartição.

A escolha do modo de financiamento (repartição ou capitalização) tem explicações significativas na distribuição pelas gerações dos encargos com pensões.

As diferenças de financiamento entre os regimes de pensões públicos e privados não têm, em geral, implicações distributivas consideráveis, mas o mesmo não acontece quanto às diferenças de estrutura das prestações. As pensões dos regimes públicos têm sido amplamente utilizadas para redistribuir rendimento entre classes da população e, ocasionalmente, para outros fins. As pensões dos regimes privados, pelo contrário, não têm sido e, provavelmente, não poderão ser utilizadas para redistribuir rendimentos.

As entidades patronais podem usar as pensões dos regimes privados para interferir na idade e na composição da sua mão-de-obra, mas as pensões dos regimes públicos não são e, provavelmente, não poderão ser usadas com esta finalidade.

Face às implicações distributivas mencionadas na segunda e na terceira premissa, as políticas que envolvem os regimes privados de pensões são completamente diferentes das que envolvem os regimes públicos. A segurança social é um instrumento da democracia social, enquanto que as pensões dos regimes privados são um instrumento do capitalismo de mercado.

## **7. BIBLIOGRAFIA**

Almeida, O. d., Nunes, S., & Amaro), T. (2010). *Aspectos Estruturais do Mercado de Trabalho*. Observatório do Emprego e Formação Profissional.

- B. Masselink, M. (2009). *Pension Funds and Economic Crises (A scenario generating approach to incorporate economic crises in the asset liability management methodology)*. University Rotterdam.
- Bonatt, L. B. (1998). *Pensions, growth and concern about the young*. Labour.
- Boulier, J.-F. *A dynamic model for pension funds management*. Universite De Paris IX Dauphine.
- Brown, R. L. (2008). *Optimal financing of social security pension schemes and its design*. University of Waterloo: International Actuarial Association (IAA) Social Security Committee.
- Felix, B. (1995). Conferências de Matosinhos. *Políticas de Protecção Social* (p. 43). Contemporânea Editora Lda.
- Garcia, M. T. AN ANALYSIS OF PENSION FUNDS IN PORTUGAL. *20th Symposium on Banking and Monetary Economics*, (p. 5 and 6 June 2003). Birmingham.
- Hu, P. D.-W. (2005). *Is there a link between pension-fund assets and economic growth?* Brunel University and NIESR - London.
- Hu, P. D.-W. (2005). *Is there a link between pension-fund assets and economic growth?* Brunel University and NIESR - London.
- INE. (2005). *Estatísticas da População (Statistics of the Population)*.
- (2010). *Men and Women in Portugal*. Instituto Nacional de Estatística, I.P.
- Mortensen, J. (1992). *The Future of Pensions in the European Community*. (UK): Brassey's (UK).
- OCDE. (1992). *Private Pensions and Public Policy*. OCDE.
- OECD. (2004). *Global Pension Statistics Project: Measuring the size of Private Pensions*.
- Oyenola, O. O. (2003). *INVESTMENT RISK: CONSIDERATIONS FOR A PENSION FUND*. Cass Business School, City London.
- Pensões, R. P.-P. (2009). *A gestão de fundos de pensões em Portugal*. Instituto Seguros Portugal.
- Pereira, P. T. (2000). *A Reforma da Segurança Social*. Celta Editora.
- Pública, M. d. (2009). *Orçamento do Estado para 2009*.
- Quelhas, A. P. (2010). *Seguros de Vida e Fundos de Pensões*. Almedina.
- Silva, C. M. (2001). *A Questão das Pensões: Capitalização, Gestão Pública e Gestão*. Seminário Departamento de Gestão: ISEG.
- Silva, P. M. (1995). *Fundos de Pensões: Caracterização e Metodologia de Avaliação da Gestão de Investimentos*.

Urwin, G. L. (2009). *Innovative models of pension fund governance in the context of the global financial crises*. Oxford University.

Almeida, O. d., Nunes, S., & Amaro, T. (2010). *Aspectos Estruturais do Mercado de Trabalho*. Observatório do Emprego e Formação Profissional.

B. Masselink, M. (2009). *Pension Funds and Economic Crises (A scenario generating approach to incorporate economic crises in the asset liability management methodology)*. University Rotterdam.

Bonatt, L. B. (1998). *Pensions, growth and concern about the young*. Labour.

Boulier, J.-F. *A dynamic model for pension funds management*. Universite De Paris IX Dauphine.

Brown, R. L. (2008). *Optimal financing of social security pension schemes and its design*. University of Waterloo: International Actuarial Association (IAA) Social Security Committee.

Felix, B. (1995). Conferências de Matosinhos. *Políticas de Protecção Social* (p. 43). Contemporânea Editora Lda.

Garcia, M. T. AN ANALYSIS OF PENSION FUNDS IN PORTUGAL. *20th Symposium on Banking and Monetary Economics*, (p. 5 and 6 June 2003). Birmingham.

Hu, P. D.-W. (2005). *Is there a link between pension-fund assets and economic growth?* Brunel University and NIESR - London.

Hu, P. D.-W. (2005). *Is there a link between pension-fund assets and economic growth?* Brunel University and NIESR - London.

INE. (2005). *Estatísticas da População (Statistics of the Population)*.

(2010). *Men and Women in Portugal*. Instituto Nacional de Estatística, I.P.

Mortensen, J. (1992). *The Future of Pensions in the European Community*. (UK): Brassey's (UK).

OCDE. (1992). *Private Pensions and Public Policy*. OCDE.

OECD. (2004). *Global Pension Statistics Project: Measuring the size of Private Pensions*.

Oyenola, O. O. (2003). *INVESTMENT RISK: CONSIDERATIONS FOR A PENSION FUND*. Cass Business School, City London.

Pensões, R. P.-P. (2009). *A gestão de fundos de pensões em Portugal*. Instituto Seguros Portugal.

Pereira, P. T. (2000). *A Reforma da Segurança Social*. Celta Editora.

Pública, M. d. (2009). *Orçamento do Estado para 2009*.

Quelhas, A. P. (2010). *Seguros de Vida e Fundos de Pensões*. Almedina.

Silva, C. M. (2001). A Questão das Pensões: Capitalização, Gestão Pública e Gestão. Seminário Departamento de Gestão: ISEG.

Silva, P. M. (1995). *Fundos de Pensões: Caracterização e Metodologia de Avaliação da Gestão de Investimentos*.

Urwin, G. L. (2009). *Innovative models of pension fund governance in the context of the global financial crises*. Oxford University.

## ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1- Taxa de desemprego .....	13
Ilustração 2 – Taxa de desemprego dos jovens .....	13
Ilustração 3 – Taxa de desemprego de longa duração (%população activa) .....	13
Ilustração 4 - População 15 a 64 anos por sexo e grupo etário .....	14
Ilustração 5 - População inactiva.....	15
Ilustração 6 - Índice de envelhecimento (N.º) por sexo, Portugal, 1970-2060.....	16
Ilustração 7 - Pirâmide etária da população residente em Portugal, 1970, 2008 e2060.....	16
Ilustração 8 - Idade média ao nascimento do primeiro filho, Portugal, 1972-2008 .....	17
Ilustração 9 - Activos de pensões em % do PIB.....	19
Ilustração 10 - Fundos de pensões em Portugal (em milhares de contos em % do PIB) .....	23
Ilustração 11 - Activos dos fundos de pensões por empresa associadas (Dezembro 2008).....	24
Ilustração 12 - Articulação do 1º e 2º pilares na União Europeia (Taxa de substituição líquida no 1º pilar público e activos dos fundos de pensões por trabalhador para o 2º pilar) .....	31

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Taxas de crescimento do número de pensionistas de velhice do regime geral e da globalidade dos regimes .....	8
Tabela 2 - Desagregação da taxa social única por eventualidades .....	10
Tabela 3 - Evolução dos rácios PM/SM e NR/NA .....	11
Tabela 4 - Evolução das entidades gestoras de fundos de pensões .....	20
Tabela 5 - Evolução dos fundos de pensões por tipo de entidade .....	20
Tabela 6 - Evolução dos montantes geridos por tipo de entidade gestora .....	21
Tabela 7 - Tipos de fundos de pensões em Portugal (Dezembro 1998; valores em milhares de contos).....	25
Tabela 8 - Fundos de pensões por tipo de plano de pensões em Portugal (Dezembro 1998; valores em milhares de contos) .....	26
Tabela 9 - Tábuas de mortalidade/participantes .....	62
Tabela 10 - Tábuas de mortalidade/beneficiários .....	62
Tabela 11 - Escala salarial em função do mérito.....	67
Tabela 12 - Taxas de desconto utilizadas pelos fundos nacionais - 2008 .....	69

	Regime Geral		
Período	Homens	Mulheres	
1970/75	166,70%	243,80%	
1975/80	110,70%	249%	
1980/85	36%	54,70%	
1985/90	29,60%	35,60%	
1990/95	26%	25,70%	

Eventualidades	Taxa Desagregada
Velhice	16,01%
Invalidez	3,42%
Morte	3,67%
Encargos familiares	2,15%
Doença	3,05%
Doença profissional	0,50%
Maternidade	0,73%
Desemprego	5,22%

	1980	1985	
PM/SM	27,40%	27,70%	
NR/NA	23,47%	23,10%	

1992	2,65
1993	2,48
1994	2,55
1995	2,45

	1987	1993	
Seguradoras do ramo «Vida»	10	11	
Sociedades gestoras de fundos de	5	15	
<b>TOTAL</b>	15	26	

	1987		
	N.º	%	
Seguradoras Vida	42	67,7	
SGFP	20	32,3	
<b>TOTAL</b>	62	100	

	1987	1993	
Seguradoras Vida	69.587 [83%]	392.629 [10%]	
SGFP	14.291 [17%]	3.544.338 [90%]	
<b>TOTAL</b>	<b>83.878 [100%]</b>	<b>3.936.967 [100%]</b>	

TV 73/77	35%
TV 88/90	32,30%
TV 73/77 (MOD.) e TV 88/90	5,70%
TV 73/77 / TV 88/90	5%
Outras	22%
TOTAL	100%

TV 73/77	38,30%
TV 88/90	32,30%
TV 73/77 (MOD.) e TV 88/90	5,70%
TV 73/77 / TV 88/90	5,30%
Outras	18,30%
TOTAL	100,00%

x	Coeficiente Salarial	x	
20	1,000	35	
21	1,045	36	
22	1,091	37	
23	1,138	38	
24	1,186	39	
25	1,234	40	
26	1,284	41	
27	1,334	42	
28	1,384	43	



29	1,436	44	
30	1,487	45	
31	1,539	46	
32	1,592	47	
33	1,644	48	
34	1,697	49	

Período de tempo	Valor de variação	Porcentagem
Período activo	entre 5% e 5,5%	
	5,5% e mais de 5,5%	
período de reforma	entre 5% e 5,5%	
	5,5% e mais de 5,5%	

Idade	$q_x^T$	
62	0,07	
63	0,08	
64	0,035	
65	1	

Idade x	N.º Participantes	
25	0	
37	12	
40	10	
55	8	
58	5	
65	0	

Participante	$e$	$x$
A	30	35
B	40	45
C	35	60
		65

Idade x	a	$B_{65}$
Nascido em 1967 -> x=42	30	974,52
Nascido em 1962 -> x=47	35	978,79
Nascido em 1958 -> x=51	39	1,064,08

Idade x	$B_{65}$	$\frac{D_j}{D_x}$
42	974,52	$\frac{24.562,438}{42.347,256}$
47	978,79	$\frac{24.562,438}{38.016,932}$
51	1,064,08	$\frac{24.562,438}{34.780,838}$

	Todos os Regimes		
Total	Homens	Mulheres	Total
189,50%	533,60%	1741,20%	891,70%
159,40%	90,50%	121,20%	107,40%
44,80%	7,60%	13,30%	11%
32,60%	13,30%	12,70%	12,90%
25,80%	12,90%	7,20%	9,50%

1990	1995
28,60%	34,10%
29,56%	36,24%

1998	2002	2006	2008
17	15	14	15
16	13	13	13
33	28	27	28

1993		1998		2002		2006		2008	
N.º	%	N.º	%	N.º	%	N.º	%	N.º	%
87	39,7	86	36,9	86	36,4	58	26	46	20
132	60,3	147	63,1	150	63,6	169	74	184	80
219	100	233	100	236	100	227	100	230	100

1998	2002	2006	2008
385.685 [3,3%]	521.520 [3,4%]	549.626 [2,6%]	393.962 [1,9%]
11.192.137 [96,7%]	15.268.196 [96,6]	20.621.363 [97,4%]	19.887.960 [98,1%]
11.577.822 [100%]	15.789.716 [100%]	21.170.989 [100%]	20.281.922 [95,8%]

Coeficiente Salarial	x	Coeficiente Salarial
1,749	50	2,460
1,802	51	2,497
1,854	52	2,532
1,906	53	2,565
1,958	54	2,596
2,008	55	2,624
2,059	56	2,651
2,108	57	2,674
2,157	58	2,696

2,204	59	2,715
2,250	60	2,731
2,295	61	2,745
2,339	62	2,756
2,381	63	2,764
2,422	64	2,769

gem do número de fundos

29%
35%
24%
31%

$q_x^c$
0,021
0,023
0,025
0

Salário anual (em euros)	D <sub>x</sub>	N <sub>x</sub>
-	47,032	1,278,186
13,200	32,691	797,621
14,500	29,816	702,477
22,000	18,429	340,549
25,000	16,625	287,094
27,500	12,827	182,432

Salário Anual	$\frac{\mathcal{E}_{64}}{\mathcal{E}_x}$	$D_e$	${}^sD_e$	$N_e$	${}^sN_e$
16,800 €	1,583	30,100	34,000	650,000	720,000
21,000 €	1,231	20,200	22,000	396,000	420,000
28,000 €	1,014	10,400	10,800	187,000	275,000
	1	9,100	9,500	170,000	182,500

$\frac{D_j}{N_a - N_j}$	$NC_x$
$\frac{24.562,438}{1.755.587,814-403.145,702}$	282,38
$\frac{24.562,438}{1.494.820,557-403.145,702}$	351,37
$\frac{24.562,438}{1.304.700,693-403.145,702}$	462,54
$NC_t = \sum_{A_t} NC_x =$	
6,29	

$NC_a$	$\ddot{a}_{x:j-x}^{(m)}$	$AL_x$
282,38	31,1164	231,84
351,37	22,8841	2,048,97
462,54	16,9204	4,163,18
$AL_t = \sum_{A_t} AL_x =$		6,443,99